TD Deug

UAG

DEUG A_1 - 1re année

92-93

M12 - analyse

(2ème semestre)

TD DE LICENCE première année 1992-93
Semestre 2 / DEUG A1
ANALYSE

Travaux Dirigés

Université des Antilles-Guyane (campus Fouillole)

Proposés par Dany-Jack Mercier
(intervenant en TD)

Mr MERCIER

DEUG A_1 1er année 92/93

UV M12 **Analyse** Cours J. NARAYANINSAMY **Organisation des T.D**

---

debut du cours Lundi 8 Fev 93 - fin du cours le 21 Mai 93

debut des T.D Lundi 15 Fev 93 fin des TD le 26 Mai 93.

Controles du 2em semestre 30/03/93 au 02/04/93.

Vacances. carnaval : 20/02/93 inclus au 24/02/93 inclus.

Paques : 05/04/93 inclus au 18/04/93 inclus

Le cours est divisé en deux sections. dans chaque section il y a 4 groupes de T.D.

section 1		section 2.	
Groupe 1	: J. NARAYANINSAMY	Groupe 5	: AYASSAMY.
Groupe 2	: TROUPE	Groupe 6	: VALMORIN.
Groupe 3	: VALMORIN (A3)	Groupe 7	: KATTABI
Groupe 4	: MERCIER.	Groupe 8	: TROUPE.

Pour chaque groupe de TD il y a une seance de 2^H + 1 seance de 1^H30. Il y aura du 15 Fev au 26 mai 11 semaines effectives de T.D.

3h30 x 11sem = 38h30 au lieu des 42h annoncés j'augmente de 15mn la durée du TD du vendredi pour arriver à 41h à l'aise

Les T.D seront partages en 5 series. Chaque serie est prevue pour durer environ deux semaines soit ≃ 7^H. Pour chaque serie distribuer un devoir à titre de travail personnel à corriger en TD selon le temps disponible

Serie 1 : J. NARAYANINSAMY

porte sur chap 1 et chap 2 paragraphes 1 et 2 :

A distribuer le 11 / 12 Fev 93 periode. 15/02/93 au 04/03/93.

Serie 2 : MERCIER.

porte sur chap 2 paragraphes 3/ 4/ 5/ et chap 3. Il faudra consulter les TD de M11 du 1er semestre sur les parties du chap 3 afin de mieux orienter les exercices qui devront être un peu plus theorique sans exès. On insistera sur les grands theoremes et le paragraphe 3/ du chap 3.

A distribuer le 01 / 02 Mars 93 periode du 04/03/93 au 19/03/93

Série 03 : TROUPE

porte sur les chapitre 4/ et 5/ Pour le chap 4 consulter les exercices deja traités en M11. On insistera plustôt sur l'aspect theorique sans entrer ds les exercices à grandes difficultés (exercices d'illustration du cours). Pour le chap 5/ insister sur la convergence des integrales.

A distribuer le 15/16 Mars 93 periode 19/03/93 au 23/04/93 *

* vacances + periode controle.

Série 04 VALMORIN

porte sur le chap 6 : essentiellement etude de courbes

A distribuer le 20/21 Avril 93 periode 26/04/93 au 10 Mai 93

Série 05 RYASSAMY

porte sur le chap 7 Mettre 1 ou 2 exercices simples sur le. le paragraphe 1/. Pour le reste ne retenir que l'aspect calcul (savoir calculer une integrale curviligne ou double sans grosses difficultés).

A distribuer le 6/7 mai periode du 11 Mai 93 au 26 Mai 93

Les textes de TD devront être deposés au secretariat de Maths (Mme STENARD) une semaine avant la date prevue pour la distribution

N.B. Les exercices devront au moins a 70% être des illustrations directes du cours et auront pour 1er objectif de faire comprendre les resultats fondamentaux du cours.

- Chaque série de T.D devra être accompagné d'un Corrigé succint mais clair à l'attention des autres intervenants.
- Compte tenu du nombre de copies (≃ 500) à corriger je demande aux permanents de prevoir une participation à la correction.

M12 Algebre et Analyse. 91/92.

Partie : Analyse. C : 33H TD 42H. DEUG A_1 1er

3H30 chap 1 : <u>le corps des reels.</u>

1) Introduction : axiomatique des reels.

On va suivre un cheminement inverse de l'exposé classique. On admet l'existence d'un unique corps comm. $\mathbb{R}$ satisfaisant l'axiome de la borne sup. et on en déduit un sous ensemble $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ satisfaisant les axiomes de Peano.

2) Rappels : ordre sur un ensemble, ensemble totalement ordonné, majorant, minorant, borne sup et borne inf. definition corps. commutatif.

3) Axiome de definition de $\mathbb{R}$ (borne sup) ; Construction de $\mathbb{N}$ (notion de sous ensemble inductif, principe de recurrence : $A \subset \mathbb{N}$ A inductif $\Rightarrow A = \mathbb{N}$)

4) Extension rapide pour voir comment on construit $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$.

5) Proprietes fondamentales de $\mathbb{R}$ (corps value., corps Archimedien, on montre la densité de $\mathbb{Q}$ ds $\mathbb{R}$; A est dense ds $\mathbb{R}$ si $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall \varepsilon > 0$ $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$)

6) Topologie de $\mathbb{R}$ ($\neq$s intervalles, voisinage d'un point, ouverts de $\mathbb{R}$, points adherents, point d'accumulation, point isolé ; caracterisation de la fermeture par l'adherence, definir compact = fermé borné)

3H30 Chap 2 : <u>Suites de Nombres reels.</u>

1) Definitions (suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, croissante, décroissante, convergente, unicité de la limite, operations et limites de suites CV ; theoreme des gendarmes)

2) Les grands theoremes. (suite ↑ et majorée, limsup liminf d'une suite bornée critere de cauchy, theoreme des segments emboités)

Ramis III p61

3) Suites extraites (definition, lemme $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ g ↑ strict alors $g(n) \geq n$, Bolzano Weierstrass admis) → "Une partie A de $\mathbb{R}$ est compacte ssi tte suite d'Eléments de A possède une valeur d'adhérence" (Valable dans un e.m. qque)

4) Suites remarquables (adjacentes, récurrente linéaire du 1er ordre)

5) Généralisation de la notion de limite. (limites infinies, operations)

5H chap 3 : Complement sur les fonctions reelles d'une variable reelle.

1/ Limite (def. limite de f en $a \in \bar{A}$ f definie sur A, f definie sur]a b[f ↑ et majorée alors f admet une limite en b a gauche, application aux suites)

2/ Continuité (continuité definition, application aux suites, preuve du theoreme des valeurs intermediaires, continuité uniforme : { Theoreme de Heine, Image d'un intervalle : theoreme de Wiertrass)
{ f cont. sur un compact ⇒ f unif. cont

insister et aussi sur les "grands théorèmes" → 3/ Derivation (rappel def ; application a la résolution numerique d'une équation au moyen de suites recurrentes, cas simple du theoreme du point fixe :
$0 \leq |F'(x)| \leq k < 1$ et $F([a\,b]) \subset [a\,b]$; "les theoremes de Rolle, extremums et accroissement finis, Taylor Lagrange sont connus").
Application a la convexité (sous ensemble convexes de $\mathbb{R}^2$, caracterisat. de la convexité de f par epigraphe, par derivée, par derivée seconde, par tangente)

6H30 chap 4 Integrale definie.

1/ Integrale de Rieman.
introduction (notion de mesure) . subdivision de [a b] _ sommes de DARBOUX (definitions et proprietés) _ Fonctions integrable au sens de Rieman (CNS d'integrabilité sur [a b] : $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ subd X de [a b] / $S_a^b(X, f) - s_a^b(X, f) < \varepsilon$

2/ Proprietés de l'integrale
Relation de chasles . formule de la moyenne . linearité . compatibilité avec l'ordre, inegalité de Cauchy Schwartz et de Minkowski.

3/ Fonctions integrables au sens de Rieman.
fonction monotone sur [a b] , ft continue sur [a b] , sommes de Rieman.

4/ Integrales et primitives
tout ft continue sur [a b] admet une primitive sur [a b] : Integrale fonction d'une borne.

3H30 chap 5 Integrales generalisées ou Impropres

1/ Introduction : ft localement integrable.
I intervalle, $\forall$ [a b] $\subset$ I f integrable sur [a b].

2/ Definitions

Cas ou l'intervalle d'intégration est non borné (Exemples fondamentaux de CV)

Cas ou l'intervalle d'intégration est non fermé mais borné (Exemples fondam. de CV)

3/ Criteres de convergence

fonction de signe constant, on travaille avec $f \geq 0$ sur $[a\ +\infty[$

C.N.S de CV : $\int_a^x f(t)\,dt$ majorée ; theoreme de comparaison : $0 \leq f \leq g$;

corol 1 : $A \leq \frac{f}{g} \leq B$; corol 2 : $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$..

Extensions de ces criteres aux cas des fonctions positives sur $[a\ b[$.

Fonction de signe qcq : absolue convergence. on travaille sur $[a\ +\infty[$ puis extension sur $[a\ b[$.

4/ Extension aux integrales impropres, des regles de calcul des integrales propres. (chasles, linéarité, parties ; chgt de variable)

6h30 chap 6 <u>Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$: courbes planes</u>

1/ Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

limite d'un vecteur, derivée d'un vecteur, developpement limité,

2/ Courbes parametrées planes.

definitions (invariances, points doubles). Etude des branches infinies

Etude locale au voisinage d'un point M_0 (definition de la tangente)

Exemple de courbe.

3/ Courbes parametrée en coordonnees polaires.

Generalites (coordonnees polaires, equation d'un ensemble de points : droites, cercles)

Etude d'une courbe $\rho = f(\theta)$ (equation resolue)

Exemple de courbe.

5h chap 7 <u>Fonctions de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}$. Integrale curviligne</u>, <u>Integrale double</u>

1/ Fonctions de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}$

definition limite et continuité : operations (on enonce les résultats)

Fonction composée ; derivées partielles fonction homogene

definir forme differentielle : differentielle totale, chg de variable ds une differentielle

2/ Integrale curviligne.

Integrale curviligne d'une forme differentielle le long d'un arc AB. Proprietes (linearite par rapport au champ, additivité par rapport au chemin)

3/ Integrale double.

definition et calcul d'une integrale double, calcul de l'aire d'une surface plane. changement de variable (le cas polaire seulement)

Formule de Green-Rieman.

M 12 91/92.

Analyse.

BIBLIOGRAPHIE (à titre indicatif)

1/ Traité de Mathematiques Speciales

CAGNAC et RAMIS. Tome 2 Analyse. MASSON et Cie

2/ MATHS

F. LIRET, M. ZISMAN Tome 1 et Tome 2. DUNOD Université

3/ Mathematiques DEUG.

LEHMAN. Tome 2 Analyse BELIN.

4/ Exercices de Mathematiques

M. Messeri Tome 2 Analyse. BELIN

Université des Antilles et de la Guyane.
Faculté des sciences
département de Mathématiques et Informatique

1992 / 93.
L.V M12 (J.N)
ANALYSE

Travaux dirigés n° 01

T équa.diff X (1) Resoudre les équations differentielles suivantes :

(a) $xy' + (2x^2-1)\,y = 0$ (b) $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$

(c) $y = x\left(y' - \sqrt{1+y'^2}\right)$ (se ramener à une equation lineaire)

(d) $xy' + (x-2)\,y = x-2$. On montrera que les courbes integrales $\mathcal{C}_\lambda$ ~~associes à la solution y satisfaisant $\lim_{x\to 0}(y-1)x^{-2} = \lambda$~~ passent par un même point

T équ.diff.lin X (2) Resoudre les équations differentielles suivantes :

(a) $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1 + 4e^{x} + 7e^{-x}$

(b) $y'' - 2y' + y = (x^2+1)\,e^{x}$

T Nbs réels X (3) Soient $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ $B \neq \emptyset$

1°) On suppose que A et B sont majorés. Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ (on commencera par etudier le cas $A = \{a\}$)

2°) On suppose toujours A et B majorés mais $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

T Nbs réels X (4) 1°) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2°) En deduire que : $(\forall a, b \in \mathbb{Q},\ a + b\sqrt{2} = 0) \Rightarrow (a = b = 0)$

T Nbs réels X (5) 1°) Soient $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, montrer que $(A \subset B) \Rightarrow (\bar{A} \subset \bar{B})$

2°) Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}^*$ convient aussi), montrer que $F = \{\theta q \ / \ q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. (on utilisera le fait qu'entre deux reels distincts il y a toujours au moins un rationnel)

3°) Deduire de 1°) et 2°) que $E = \{p + \theta q \ / \ p \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}\}$ ($\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$) est dense dans $\mathbb{R}$. ($\mathbb{R}^*$ convient)

T Nbs réels X (6) On rappelle qu'un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ssi $\forall x \in I\ \forall y \in I$ $[x\ y] \subset I$ ou bien $[y\ x] \subset I$.

Sur A sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$, on definit une relation par :

E $x \equiv y\ [A]$ ssi $[x, y] \subset A$.

$x \leq y$

Montrer que c'est une relation d'equivalence dont les classes sont des intervalles.

ven 19/2

/.

facile : $A \subset [0,1] \Rightarrow \bar{A} \subset [0,1]$

X (7) Soit $A = \left\{ \frac{n}{nm+1} , (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$

Montrer que $\bar{A} \subset [0\ 1]$

T X (8) Suites

Soit $a \in \mathbb{R}_+$, on considère la suite U definie par : $U_0 = a$,

$U_{n+1} = a + \frac{1-e^{-n}}{2} U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1:) Montrer que pour tout n $U_n \leq 2a$

2:) Etudier les variations de $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{2}$ $x \in \mathbb{R}_+$, En déduire que U est croissante

3:) Montrer que U est convergente et calculer $\lim_{n\to\infty} U_n$

T X (9) Suites

On pose $U_n = \frac{10^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1:) ecrire les 10 premiers termes de U_n puis etudier sa monotonie.

2:) Montrer que $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$

T X (10) Suites

On definit une suite U par $U_1 > 0$ et $U_n = \frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{1}{U_{n-1}}\right) \quad \forall n > 1$.

1:) Montrer que $\forall n \geq 1 \quad U_n > 0$

2:) Montrer que la suite U est convergente.

T X (11) suites

Montrer que la suite U definie par $U_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

converge vers $l \in [0\ 1]$.

T X (12) suites

Les suites (a_n) (b_n) (c_n) sont determinées par leur premier terme a_0, b_0, c_0 et par les relations : $a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n)$; $b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n)$;

$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.

$(a_n - b_n)_n$, $(b_n - c_n)$, $(c_n - a_n)$

E Que dire de la suite $a_n + b_n + c_n$? Montrer que les suites (a_n) (b_n) (c_n) sont geometriques. Pour chaque suite donner la raison et la limite qd $n \to \infty$.

T X (13) Th du pt fixe

Soit la suite (x_n) definie par $x_0 \in \mathbb{R}$; $x_n = f(x_{n-1}) \quad \forall n \geq 1$.

Montrer que si la fonction f verifie : $|f(b) - f(a)| \leq k\,|b-a| \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

avec $0 < k < 1$ alors la suite (x_n) est convergente. (on cherchera à montrer que c'est une suite de CAUCHY).

mar 2/3/93

92/93

DEUG A.1 M12
1re année

TD N°1 Analyse
Corrigé.

---

① (a) $xy' + (2x^2-1)y = 0$

Equation a variables séparées $y = c\,xe^{-x^2}$

(b) $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$

Equation Homogène $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}$

2 cas a envisager 1/ si $x>0$ $y' - \frac{y}{x} = \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$ poser $t = y/x$

on trouve alors $y = \frac{1}{2k}(k^2x^2-1)$ avec $k>0$ en notant que la primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est $\mathrm{Log}(t+\sqrt{1+t^2})$. Eventuellement poser $t = \mathrm{sh}\,y$ pour calculer la primitive

E | 2° cas si $x<0$, m̂ travail, m̂ résultat avec $-k$.

faux – On trouve encore $y = \frac{1}{2k}(k^2x^2-1)$ avec $k>0$

(c) $y = x(y' - \sqrt{1+y'^2}) \iff xy' - y = x\sqrt{1+y'^2}$.

elever les deux membres au carré et poser alors $u = y^2$, on est ramené à une équation linéaire qui donne comme solution $y^2 = -x^2 + cx$.

donc $y = \varepsilon\sqrt{-x^2+cx}$ $x \in]0,1[$, $c \neq 0$ ($c=0$ est exclu). $\varepsilon \in \{-1,1\}$.

on montre que le choix de ε dépend du signe de c en écrivant que $x(xy'-y) \geq 0$, avec y' tiré de l'equation linéaire obtenue après élévation au carré.

(d) 1°/ $xy' + (x-2)y = x-2$.

en fait $\begin{cases} y = cx^2e^{-x}+1 & \text{si } x \geq 0 \\ y = c'x^2e^{-x}+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ avec éventuellement $c \neq c'$

E | Equation linéaire simple solution $y = cx^2e^{-x}+1$

voir T éq. diff

2°/ $\mathcal{C}_\lambda$ est la courbe d'equation $y = \lambda x^2e^{-x}+1$ passe $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ par $(0,1)$

3°/ on trouve que $\mathcal{C} : (x,y) \longmapsto (x, 1 + \lambda_2/\lambda_1 (y-1))$.

D.E.U.G A 1re année

(2)

(a) $y'' - 4y' + 3y = 6x+1 + 4e^{x} + 7e^{-x}$

L'equation caract admet pour solutions 1 et 3 d'ou $Ae^{x} + Be^{3x}$ est solut de l'equation homogène. Decomposer le 2^d^ membre en 3 parties.

solution particuliere associee à $6x+1$ est $y = 2x+3$

solution particuliere associee à $4e^{x}$, est $y = -2xe^{x}$

solution particuliere associee à $7e^{-x}$ est $y = \frac{7}{8}e^{-x}$

(b) $y'' - 2y' + y = (x^2+1)\,e^{x}$

racine double 1, solut. homogene est $(Ax+B)e^{x}$. Plutôt que de rechercher un polynôme de degré 4 (calculs sont longs), rechercher directement une solution particuliere sous la forme $P(x)\,e^{x}$ on trouve alors $P'' = x^2+1$ d'ou la solution generale

?! idem??

(3) 1/ Voir d'abord avec $A = \{a\}$ que $\sup(a+B) = a + \sup B$

Voir que $a + \sup B$ est un majorant donc $\sup(a+B) \leq a + \sup B$, appliquer cette inegalité à $a' = -a$ et $B' = a+B$ on obtient l'inégalité inverse.

Cas général voir que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$, soit M un autre majorant on $\forall (a,b) \in A \times B$ $M \geq a+b \Rightarrow M \geq \sup_{a \in A}(a+b) = \sup(A+b) = \sup A + b$

$\forall b \in B$ $M \geq \sup A + b$ donc $M \geq \sup_{b \in B}(\sup A + b) = \sup[\sup A + B] = \sup A + \sup B$

2/ Verifier que $\sup A \sup B$ est un majorant de $A.B$

donc soit N un autre majorant on aura. $N \geq \sup A \sup B$ par un raisonnement identique au 1/.

(4)

1°) faire un raisonnement par l'absurde. en supposant $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $(p,q) \in \mathbb{Q}^2$ et irreductible. $(p,q) = 1$. (passage au carré) $\Rightarrow$ (p et q sont pairs).
ce qui contredit $(p,q) = 1$.

2°) supposons $a + b\sqrt{2} = 0$

si $b = 0$ alors $a = 0$.

si $b \neq 0$ alors $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ~~donc $b = 0$~~.
ce qui est absurde

(5)

1°/ Utiliser la definition de l'adherence. ($\forall \varepsilon > 0$ $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$)

2°/ $F = \{\theta q \quad q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. $\Rightarrow \bar{F} \subset \mathbb{R}$

$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{Q} \,/\, \frac{a-\varepsilon}{\theta} < q < \frac{a+\varepsilon}{\theta}$ ou $\frac{a+\varepsilon}{\theta} < q < \frac{a-\varepsilon}{\theta}$

de toute façon. $\forall \varepsilon > 0$ $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap F \neq \emptyset$ donc $\bar{F} = \mathbb{R}$

3°/ on a $F \subset E \subset \mathbb{R} \Rightarrow \bar{F} \subset \bar{E} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \bar{E} = \mathbb{R}$.

(6)

La relation d'equivalence est evidente, pour la transitivité regarder le $[x\ z]$ en fonction de la position de y par rapport à x et z.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $cl(x)$ est un intervalle.

$\forall y \in cl\,x$ $\forall z \in cl\,x$ par transitivité $y \equiv z$ donc $[y\ z] \subset A$

$\forall t \in [y\ z]$ $[y\ t] \subset A \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y \equiv t \\ x \equiv y \end{array}\right\} \Rightarrow x \equiv t \Rightarrow t \in cl\,x$

donc $\forall y \in cl\,x$ $\forall z \in cl\,x$ $\forall t \in [y\ z]$ $t \in cl\,x$ donc $[y\ z] \subset cl\,x$
ce qui caracterise un intervalle.

⑦ $A = \left\{ \frac{n}{mn+1} \quad (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$

$\frac{n}{mn+1} = \frac{1}{m + \frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{m+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{m} \Rightarrow A \subset]0\ 1[$

donc $\bar{A} \subset [0\ 1]$.

⑧ Remarquer que si $a = 0$ on a $U_n = 0\ \forall n$. on suppose $a > 0$.

1/ $U_0 \leq 2a$ recurrence.

$U_{n+1} = a + \frac{1-e^{-n}}{2} U_n \leq a + (1-e^{-n})\ x = 2a - ae^{-n} \leq 2a$ car $ae^{-n} \geq 0$

2/ Variations de $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{2}$ donne croissance de f sur $\mathbb{R}_+$

Nous avons $U_0 = a$ et $U_1 = a$ et $U_1 \leq U_2$ car $f(x) \geq 0$.

supposons $U_{n-1} \leq U_n$

Nous avons $\frac{1-e^{-(n-1)}}{2} \leq \frac{1-e^{-n}}{2}$ $\Big\} \Rightarrow U_{n-1} \times \frac{1-e^{-(n-1)}}{2} \leq U_n \frac{1-e^{-n}}{2} \Rightarrow$

$a + \frac{1-e^{-(n-1)}}{2} U_{n-1} \leq a + \frac{1-e^{-n}}{2} U_n \Leftrightarrow$

$U_n \leq U_{n+1}$

La suite U est croissante et majorée par $2a$ elle est donc CV.

3/ $U_{n+1} = a + \frac{1-e^{-n}}{2} U_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{1-e^{-n}}{2} U_n\right)$

$\Rightarrow \ell = a + \frac{1}{2}\ell \Rightarrow \frac{1}{2}\ell = a \Rightarrow \ell = 2a$.

⑨ 1/ $U_0 = 1$, $U_1 = 10$, $U_2 = \cancel{25}\ 50$.

faire $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ car $U_n \geq 0\ \forall n$: on a $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{10}{n+1}$

donc

$\forall n \leq 9 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

$\forall n > 9 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$

en remarquant que $U_{10} = U_9$

2/

$\forall n,\ n \geq 10 \Rightarrow \frac{10}{n+1} < \frac{10}{11} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{10}{11}\ \forall n \geq 10$

posons $k = \frac{10}{11}$.

on aura $\forall n \geq 10$ $U_{n+1} < k U_n$. $0 < k < 1$

ecrivons

$U_{11} < k U_{10}$

$U_{12} < k U_{11}$

$\vdots$

$U_n < k U_{n-1}$

n-10 en inégal

par multiplication $U_n < k^n a$ ou $a = \frac{U_{10}}{k^{10}}$

$\lim_{\infty} k^n = 0 \Rightarrow \lim_{\infty} U_n = 0$.

⑩ 1/ par recurrence on montre que $U_n > 0\ \forall n$

2/ etude de $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ montre que $f(x) \geq 1\ \forall x \geq 0$ donc $U_n \geq 1\ \forall n \geq 2$

$U_n - U_{n-1} = \frac{1 - U_{n-1}^2}{2} \leq 0\ \forall n \geq 3$ (car $n \geq 3 \Rightarrow U_{n-1} \geq 1$) soit $U_n \searrow$ pour $n \geq 3$

suite $\searrow$ et minorée est CV.

Ne pas utiliser f continue $\Rightarrow f(\ell) = \ell$ (sera vu seulement au le chapitre 3)

D.E.U.G A.1 1re année

(11) 1°/ $U_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

$\forall k = 1, \dots, n \quad \sqrt{n+1} > \sqrt{k} \Rightarrow n \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow (U_n)$ suite decroissante

nous avons $\forall k = 1, \dots n \quad \sqrt{k} \geq \sqrt{1} \Rightarrow n \times \frac{1}{\sqrt{1}} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow U_n \leq 1$. comme $U_n \geq 0$

nous avons $\lim_n U_n = \ell \in [0\ 1]$.

faire si les sous suites sont vues.

calculer $U_{2n} - \frac{1}{2}U_n = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) < \frac{1}{2n} \times \left(n \times \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

on en deduit, par passage a la limite, que $\ell \leq \frac{1}{2}\ell \Rightarrow \ell \leq 0 \Rightarrow \ell = 0$

(12) Voir que $a_n + b_n + c_n$ est une suite constante de 1er terme $a_0 + b_0 + c_0$.

verifier que $a_{n+1} - b_{n+1}$, $b_{n+1} - c_{n+1}$, et $a_{n+1} - c_{n+1}$ sont des suites geometriques de raison $-\frac{1}{2}$, Donc $a_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - b_0)$ idem pour les autres. En remplaçant dans $a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0$; b_n et c_n par leurs expressions tirees de $a_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_0 +$ et $(a_n - c_n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - c_0)$ on deduit que $a_n = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (2a_0 - b_0 - c_0)$

de même pour (b_n) et (c_n) (permutation circulaire sur a_0, b_0, c_0). D'ou nous deduisons

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0)$$

(13) Ecrire $|x_n - x_{n-1}|$ et voir que de proche en proche on arrive à :

$|x_n - x_{n-1}| < k^{n-1}|x_1 - x_0|$. En deduire que (x_n) est de CAUCHY. En ecrivant $x_{n+p} - x_n = x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - \dots + \dots + x_{n+1} - x_n$. on montre que $|x_{n+p} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0| (1 + k + \dots + k^{p-1})$, d'ou le resultat car $\lim_n k^n = 0$ et $\lim_p (1 + k + \dots + k^{p-1}) = \frac{1}{1-p}$.

Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des sciences.
Département de Mathématiques et Informatique.

1992/93
LIV M 12.
ANALYSE

Devoir libre n° 01

A corriger dès la semaine du 01/03/93

① Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x et on note $E(x)$ l'entier relatif défini par : $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ on associe au réel x, les suites rationnelles (a_n) et (b_n) définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{1}{p^n} E(p^n x)$ et $b_n = a_n + \frac{1}{p^n}$. On dit que a_n (resp b_n) est la valeur approchée de x à $\frac{1}{p^n}$ près par défaut (resp par excès).

On pose $c_0 = E(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $c_n = E(p^n x) - pE(p^{n-1}x)$.

1°/ Montrer que l'on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$E(x) \leq x \leq E(x) + 1$ et $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1$

2°/ Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_n \leq x < b_n$.

3°/ Démontrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$.

4°/ Démontrer la proposition suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $c_{n+1} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ et $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{c_k}{p^k}$.

② (Contrôle Avril 91)

On considère le sous ensemble E de $\mathbb{R}$ défini par :

$$E = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \ / \ (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$$

Montrer que $E \subset]0\ 2]$, En déduire $\sup E$ et $\inf E$.

③ (Contrôle avril 90)

On définit les deux suites réelles u et v par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ $n \in \mathbb{N}$

$v_0 = 12$ et $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$ $n \in \mathbb{N}$

On pose : $w_n = v_n - u_n$ et $t_n = 3u_n + 8v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1°) Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs.

2°) En déduire que les suites u et v sont convergentes et ont même limite.

3°) Montrer que la suite t est stationnaire, en déduire la limite de u et de v

Corrigé D.L n°01 92/93

① 1°/ $x \in \mathbb{R}$ on a, $E(x) \leq x < E(x)+1$.

en effet si $p = E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$ alors $p \leq x$.

si on avait $p+1 \leq x$ alors p ne serait pas le plus grand des entiers minorant x, c'est donc $p+1 > x$

$x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on peut écrire : $x-1 < E(x) \leq x$ en multipliant par n.

on a : $nx - n \overset{(1)}{<} nE(x) \overset{(2)}{\leq} nx$, en prenant les parties entières on a :

$E(nx-n) \leq nx-n$ et (1) donnent (3). definition du sup et (2) donne (4)

$E(nx) - n \underset{(3)}{<} nE(x) \underset{(4)}{\leq} E(nx)$ donc $0 \leq E(nx) - nE(x) < n \Rightarrow E(nx) - nE(x) \leq n-1$

2°/ $a_n = \frac{1}{p^n} E(p^n x)$ $\quad b_n = a_n + \frac{1}{p^n}$

$E(p^n x) \leq p^n x < E(p^n x)+1 \Rightarrow a_n \leq x < b_n$. (multiplier par $1/p^n$)

3°/ nous avons vu en 1°/ que $\forall y \in \mathbb{R}$ $0 \leq E(py) - pE(y) \leq p-1$. prenons $y = p^n x$

$0 \leq E(p^{n+1}x) - pE(p^n x) \leq p-1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{p^{n+1}} E(p^{n+1}x) - \frac{1}{p^n} E(p^n x) \leq \frac{1}{p^n} - \frac{1}{p^{n+1}}$

c.a.d. $0 \leq a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{p^n} - \frac{1}{p^{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} + \frac{1}{p^{n+1}} \leq a_n + \frac{1}{p^n}$ $\quad \begin{cases} a_{n+1} \geq a_n \\ b_{n+1} \leq b_n \end{cases}$

les suites (a_n) et (b_n) sont donc respectivement croissante et decroissante.

$b_n - a_n = \frac{1}{p^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

I [comme $a_n \leq b_n$ $\forall n$, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc $\lim_{\infty} a_n = \lim_{\infty} b_n$

INC [comme $a_n \leq x < b_n$ on a $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$.

② 2 est un majorant de E (car $\frac{1}{m} \leq 1$ et $\frac{1}{n} \leq 1$) de plus $2 \in E$ donc $2 = \sup E$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $1/m + 1/n > 0$ donc 0 est un minorant de E

$\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\exists m_0, n_0 / m \geq m_0$ et $n \geq n_0$ donne $\frac{1}{m} < \varepsilon/2$ et $\frac{1}{n} < \varepsilon/2$

d'ou. $\exists (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / 0 < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \varepsilon$ donc $0 = \inf E$

③ 1°/ $V_0 = 11$; $W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} - \frac{U_n + 2V_n}{3} = \frac{1}{12} W_n \Rightarrow W_n = \left(\frac{1}{12}\right)^n \times 11$.

2°/ on a $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + 2V_n}{3} - U_n = \frac{2}{3} W_n > 0$ donc $U_n \uparrow$

on a $V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{4} W_n < 0$ donc $V_n \downarrow$.

$W_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow V_n > U_n$.

$\lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty} (V_n - U_n) = 0$

$\Rightarrow$ U et V sont des suites adjacentes donc $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n$

3°/ on calcule $t_{n+1} - t_n$ et on trouve $t_{n+1} - t_n = 0$ $\forall n$. et $t_0 = 99$.

donc $\lim_{n\to\infty} t_n = 3 \lim_{n\to\infty} U_n + 8 \lim_{n\to\infty} V_n \Rightarrow 3\ell + 8\ell = 99 \Rightarrow \ell = 9$.

Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

1992 - 93
U.V. M12
Analyse
Deug A_1 - 1ère année

TRAVAUX DIRIGES n° 2

① Soit $(x_n)_n$ une suite réelle telle que les suites extraites (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) soient convergentes. Montrer que $(x_n)_n$ est convergente.

② On définit 2 suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs par les relations de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}$$

et la donnée des premiers termes a_0 et b_0 strictement positifs.

a) Etudier le cas $a_0 = b_0$. Dans la suite, on suppose $a_0 \neq b_0$

b) Proposer une construction géométrique de a_1 et b_1 connaissant a_0 et b_0 dans chacun des cas $a_0 < b_0$ et $a_0 > b_0$.

c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes

(extrait du CAPES interne 91, 1ère composition)

③ <u>Suite arithmético-géométrique</u> :

Soit la suite réelle (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = a u_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, a, b, u_0 étant des réels donnés.

a) Si $a = 1$, calculer u_n en fonction de n et discuter $\lim u_n$.

b) Si $a \neq 1$, déterminer un réel c de sorte que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n + c$ soit une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis étudier la convergence de (u_n) en fonction des paramètres a, b et u_0.

④ <u>ln n'est pas une fraction rationnelle</u>

Soit $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ une fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ / \ g(x) = 0\}$ où f et g sont 2 polynômes à coefficients réels. On suppose que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ et que $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in D \setminus \{0\}$. Montrer que 0 est nécessairement racine de g, puis, en écrivant $g(x) = x^n h(x)$ où $h(0) \neq 0$, arriver à une absurdité.

⑤ Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

⑥ La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$?

⑦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

⑧ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$. Montrer l'existence de $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$

⑨ <u>Th. de Rolle généralisé et règle de l'Hôpital</u>

a) En appliquant le lemme de Rolle à la fonction

$$\varphi(t) = [f(b) - f(a)]\, g(t) - [g(b) - g(a)]\, f(t)$$

démontrer le Th. de Rolle généralisé :

" Si f et g sont 2 applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c) \qquad "$$

b) En déduire la règle de l'Hôpital : "Si f et g sont 2 applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, continues sur I, dérivables sur $I \setminus \{a\}$ où $a \in I$, et vérifiant $f(a) = g(a) = 0$ et $\forall t \in I \setminus \{a\}$ $g'(t) \neq 0$, alors :

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t \neq a}} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{t \to a \\ t \neq a}} \frac{f(t)}{g(t)} = \ell \qquad (\text{où } \ell \in \overline{\mathbb{R}})$$

c) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ en utilisant la règle de l'Hôpital, puis vérifier le résultat en utilisant des développements limités.

⑩ <u>Extrait du concours Polytechnique 90</u> :

a) Justifier, pour tout réel $s > 1$, l'inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{s-1}} - \frac{1}{\sqrt{s}} \leq \frac{1}{2(s-1)^{3/2}}$$

b) Montrer que, pour tout réel $s > 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{s-1}} - \frac{1}{\sqrt{s}} \geq \frac{1}{2s^{3/2}}$$

1992-93
M12
Analyse
Deug A_1 - 1 année

Suite du TD n° 2

(11) a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b] \setminus \{x_0\}$ où $x_0 \in [a,b]$. Montrer que si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

b) Montrer que a) est faux si f n'est plus supposée continue en x_0.

c) Prouver que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (ie infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$).

d) Soit $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que g' n'a pas de limite en 0. Que peut-on en déduire quant à la réciproque du a) ?

(12) Montrer que les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$, mais que ce n'est pas le cas de $x \mapsto x^3$.

(13) Trouver un exemple simple montrant que le produit de 2 fonctions convexes n'est pas en général convexe. Cependant, vérifier que le produit de 2 fonctions convexes positives et croissantes est encore convexe.

(14) Montrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad \forall \alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta = 1$, $\quad \alpha \ln x + \beta \ln y \leq \ln(\alpha x + \beta y)$

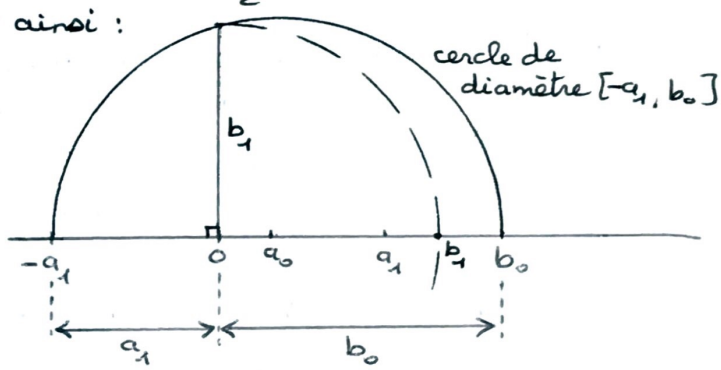
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+$ $\quad \sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$

Solution abrégée du TD n°2

① Soient ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 les limites de $(x_{2n}), (x_{2n+1}), (x_{3n})$. (x_{2n}) et (x_{3n}) admettent la même sous-suite $(x_{6k})_k$ qui convergera donc vers ℓ_1 et ℓ_3. Donc $\ell_1 = \ell_3$.
$(x_{3(2k+1)})_k$ est une sous-suite de (x_{3n}) et de (x_{2n+1}), donc convergera vers ℓ_2 et ℓ_3, donc $\ell_2 = \ell_3$. Finalement $\ell = \ell_1 = \ell_2 = \ell_3$, et le résultat provient de $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = \ell$

② a) Alors $a_n = b_n = a_0$ pour tout n (récurrence sur n)

b) Dans le cas $a_0 < b_0$ (autre cas similaire), $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ est le milieu de $[a_0, b_0]$ et $b_1 = \sqrt{b_0 a_1}$ peut être construit ainsi :



c) Supposons $a_0 < b_0$ (autre cas identique)

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \\ b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n a_{n+1}} - b_n = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_n}\right) \end{cases}$$

* Si l'on montre que $a_n \leq b_n$ $\forall n$, on déduira $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $b_{n+1} - b_n \leq 0$ (car a_{n+1} milieu de $[a_n, b_n]$ sera inférieur à b_n donc $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_n} \leq 0$), ie la décroissante de (b_n) et la croissance de (a_n).

* Vérifions que $a_n \leq b_n$ $\forall n$ par récurrence sur n : cela provient de

$$a_{n+1} \leq b_{n+1} \iff a_{n+1} \leq \sqrt{b_n a_{n+1}} \iff a_{n+1} \leq b_n \iff \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n \iff a_n \leq b_n$$

* (a_n) est croissante majorée par b_0 donc converge vers ℓ. (b_n) est décroissante minorée par a_0, donc converge vers ℓ'. En passant à la limite dans $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ on tire $\ell = \ell'$.

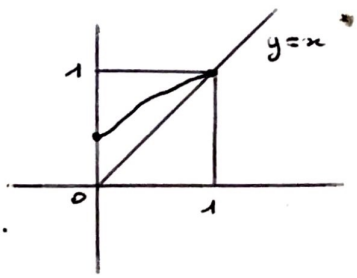
③ a) $u_n = u_0 + nb$

b) $c = \dfrac{b}{a-1}$ et $u_n = a^n u_0 + b\,\dfrac{a^n - 1}{a-1}$ (...)

④ 0 est racine de g sinon $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f}{g} = \dfrac{f(0)}{g(0)} \neq -\infty$. Donc $g(x) = x^n h(x)$ avec $n \geq 1$ et $h(0) \neq 0$.
On peut supposer que x ne divise pas f quitte à simplifier $\dfrac{f}{g}$ par x.
$\varphi = \dfrac{f}{x^n h}$ et $\varphi' = \dfrac{1}{x}$ entrainent $x f' h - n f h - x f h' = x^n h^2$ d'où $f(0) h(0) = 0$, absurde.

⑤ Si $f(0)=0$ ou $f(1)=1$, c'est fini.

Sinon $f(0)>0$ et $f(1)<1$. $g \doteq f - Id$ est continue sur $[0,1]$ et vérifie $g(0)>0$ et $g(1)<0$.
Le Th. des valeurs intermédiaires permet de conclure.

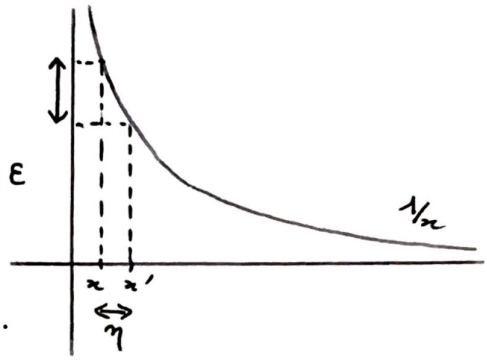


⑥ Montrons que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ie :

$\exists \varepsilon>0 \quad \forall \eta>0 \quad \exists x,x' \in \mathbb{R}_+^* \quad |x-x'|\leq\eta$ et $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}\right| \geq \varepsilon$

Fixons $\varepsilon>0$. Donnons-nous $\eta>0$ et prenons $x'-x=\eta$.

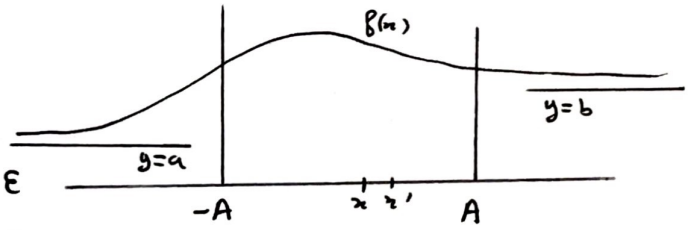
$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}\right| = \frac{\eta}{xx'} \geq \frac{\eta}{x'^2}$ sera $\geq \varepsilon$ dès que $x' \leq \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon}}$.



⑦ $\forall \varepsilon>0 \quad \exists A \quad x \geq A \Rightarrow |f(x)-b| \leq \varepsilon$
$\qquad\qquad\qquad\qquad x \leq -A \Rightarrow |f(x)-a| \leq \varepsilon$

f continue sur le compact $[-A,A]$ sera uniformément continue sur $[-A,A]$ (Th. Heine), ie :

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \eta \quad x,x' \in [-A,A] \quad |x-x'|\leq\eta \Rightarrow |f(x)-f(x')|\leq\varepsilon$



On montre qu'une affirmation du m̂ style est vraie quand x,x' décrivent $\mathbb{R}$. Prenons $\eta_0 = \inf(\eta, 2A)$ de sorte que $|x-x'|\leq\eta_0$ assure que l'on n'ait pas $x<-A$ et $x'>A$. Envisageons les 2 cas restants :

* <u>Si $x \in [-A,A]$ et $x'>A$</u>,

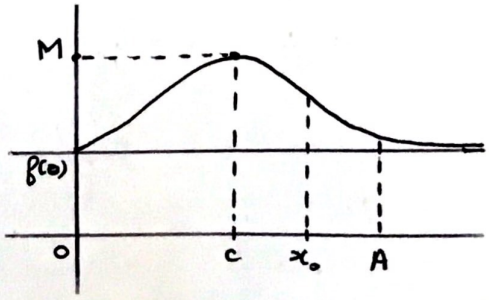
$$|f(x)-f(x')| \leq \underbrace{|f(x)-f(A)|}_{\substack{\leq \varepsilon \\ \text{dès que } |x-A|\leq\eta_0 \\ \text{donc dès que } |x-x'|\leq\eta_0}} + \underbrace{|f(A)-f(x')|}_{\leq |f(A)-b|+|b-f(x')| \leq 2\varepsilon}$$

* <u>Si $x<-A$ et $x' \in [-A,A]$</u>, idem.

Finalement : $\forall \varepsilon>0 \ \exists \eta_0 \quad x,x' \in \mathbb{R} \quad |x-x'|\leq\eta_0 \Rightarrow |f(x)-f(x')| \leq 3\varepsilon$

⑧ Si $f(x)=f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f' \equiv 0$ et c'est fini.

Sinon, il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq f(0)$, et l'on peut supposer $f(x_0)>f(0)$ quitte à prendre $-f$ à la place de f.



On a : $\exists A > x_0 \quad x \geq A \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \dfrac{f(x_0) - f(0)}{2} \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

Soit $M = \sup\limits_{[0,A]} f(x)$. f étant continue sur $[0,A]$, cette borne sera atteinte, ie il existe $c \in [0,A]$ tq $M = f(c)$.

$$\left.\begin{array}{l} M \geq f(x_0) > f(0) \Rightarrow c \neq 0 \\ M \geq f(x_0) > f(A) \Rightarrow c \neq A \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ atteint son maximum (sur } [0,A]\text{, d'ailleurs aussi sur } \mathbb{R}_+) \text{ en } c \in]0,A[$$

On déduit $f'(c) = 0$ comme dans la preuve du lemme de Rolle.

(9) a) On vérifie que $\varphi(a) = \varphi(b)$

b) Supposons $\ell \in \mathbb{R}$ ($\ell = \pm\infty$ similaire).

D'après a) :

$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad \exists c$ entre a et x $\quad f(x)g'(c) = g(x)f'(c) \quad$ ie $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

($g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, sinon le lemme de Rolle entraîne $g'(\xi) = 0$ pour ξ strictement entre a et x, absurde)

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe η tel que $|c - a| < \eta \Rightarrow \left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right| < \varepsilon$, et l'on aura donc aussi :

$|x - a| < \eta \Rightarrow \exists c$ entre a et x, donc tel que $|c - a| < |x - a| < \eta$, vérifiant $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right| < \varepsilon$$

c) On trouve $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2$

(10) Le a) provient de l'inégalité des accroissements finis appliquée à $f(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}$, tandis que le b) provient du Th. de Rolle appliqué à cette même fonction.

Appliquons le Th. de Rolle pour répondre simultanément à a) et b) :

$\exists c \in]s-1, s[\qquad \dfrac{1}{\sqrt{s-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{s}} = \dfrac{1}{2c^{3/2}}$

d'où $\qquad \dfrac{1}{2s^{3/2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{s-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{s}} \leq \dfrac{1}{2(s-1)^{3/2}}$

(11) a) $g(x) \doteq f(x) - \ell . x$ est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur $]x_0, x[$ quand x est suffisamment voisin de x_0. L'inégalité des accroissements finis entraine :

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \underbrace{\sup_{t \in]x_0, x[} |f'(t) - \ell|}_{\leq \varepsilon \text{ dès que } |x - x_0| < \eta \text{ car } \lim_{x \to x_0} f'(t) = \ell} . |x - x_0|$$

d'où $|f(x) - f(x_0) - \ell (x - x_0)| \leq \varepsilon \ |x - x_0|$ dès que $|x - x_0| < \eta$, et donc $f'(x_0) = \ell$ existe bel et bien.

b) Contre-exemple : $x \mapsto E(x)$

c) Il suffit de montrer que :

"f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} f^{(n)}(x) = x^{-3n} P_n(x) e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ f^{(n)}(0) = 0 \end{cases}$

où $P_n(x)$ est un polynôme"

par récurrence sur n en utilisant le a)

d) Facile.

(12) On retourne à la définition, surtout pour $|x|$, ou on utilise :

Th : "Si f est <u>2 fois dérivable</u> sur l'intervalle <u>ouvert</u> I, alors :

$$f \text{ convexe} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \text{ "}$$

(13) * Contre-ex : x et x^2. * Si f et g sont convexes, positives et croissantes, alors $f(\alpha x + \beta y) . g(\alpha x + \beta y) \leq (\alpha f(x) + \beta f(y))(\alpha g(x) + \beta g(y))$ et tout revient à montrer : (*) $(\alpha f(x) + \beta f(y))(\alpha g(x) + \beta g(y)) \leq \alpha f(x) g(x) + \beta f(y) g(y)$.
En se rappelant que $\beta = 1 - \alpha$, on montre que (*) équivaut à $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ qui est vrai puisque f et g croissent (... et se multiplient !)

(14) Simples applications de la concavité du logarithme.

UAG
Dpt Math - Info

Deug A_1 - 1 année
M12 - ANALYSE
92-93

Devoir Libre n° 2

(à corriger dans la sem. du 15/3/93)

① a_0 et b_0 sont 2 réels strictement positifs. On construit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) en posant :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Démontrer que $a_n \leq b_n$ pour $n \geq 1$, puis que a_n est croissante tandis que b_n décroît pour $n \geq 1$. En déduire que ces 2 suites convergent vers une même limite.

② On pose $E = \left\{ \frac{k}{2^n} \,/\, k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 2^n \right\}$

a) Montrer que tout réel $x \in [0,1]$ est limite d'une suite d'éléments de E (On pourra utiliser la partie entière de $2^n . x$)

b) Soit f une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que : $\forall x, y \in I \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$
Montrer que f est convexe sur I.

(Ind. : On pourra commencer par prouver que $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$ est vraie pour tout $\alpha, \beta \in E$ tels que $\alpha + \beta = 1$ en procédant par récurrence sur n ...)

③ a) Dessiner l'allure de la courbe $x \mapsto \tan 2x$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et représenter la droite d'équation $y = x$ sur le même dessin.
Résoudre graphiquement l'équation $\tan 2x = x$ quand $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

b) On pose $I_n = \left]\left(2n-1\right)\frac{\pi}{4}, \left(2n+1\right)\frac{\pi}{4}\right[$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Vérifier que : $\left.\begin{array}{l} \tan 2x = x \\ x \in I_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x + n\frac{\pi}{2}$

c) Fixons $n \in \mathbb{Z}$, et considérons l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & I_n \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x + n\frac{\pi}{2} \end{array}$$

Montrer que f est strictement contractante et que $f(\overline{I}_n) \subset \overline{I}_n$. En déduire l'existence d'une unique solution α de l'équation $\tan 2x = x$ dans $\overline{I}_n$, et donner un algorithme permettant d'approximer cette solution.

Solution abrégée du DL n°2

① $a_n \leq b_n$ $(n \geq 1)$ provient de $\forall a,b \in \mathbb{R}_+$ $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

On déduit $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \geq 0$ et $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$ si $n \geq 1$.

(a_n) (resp. (b_n)) est croissante majorée (resp. déc. min.) donc converge vers ℓ (resp. ℓ') et en passant à la limite dans $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, on obtient $\ell = \ell'$.

② a) facile

b) Tout revient à prouver que $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$ est vrai quand $\alpha, \beta \in E$ et $\alpha + \beta = 1$, puisqu'alors on passe à la limite dans l'inégalité pour l'obtenir pour tout $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

On montre, par récurrence sur n, que :

$$\left\{ \forall \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n + \beta_n = 2^n \quad f\left(\frac{\alpha_n}{2^n} x + \frac{\beta_n}{2^n} y\right) \leq \frac{\alpha_n}{2^n} f(x) + \frac{\beta_n}{2^n} f(y) \right.$$

Trivial si $n = 0$. Au rang $n+1$, on doit prouver :

$$(*) \quad f\left(\frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}} x + \frac{\beta_{n+1}}{2^{n+1}} y\right) \leq \frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}} f(x) + \frac{\beta_{n+1}}{2^{n+1}} f(y)$$

où $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 2^{n+1}$.

<u>1er cas</u> : α_{n+1} et β_{n+1} <u>sont pairs</u>.

Alors $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$, $\beta_{n+1} = 2\beta_n$ et $\alpha_n + \beta_n = 2^n$. On retombe sur l'inégalité au rang n.

<u>2e cas</u> : <u>α_{n+1} ou β_{n+1} est impair</u>. Alors ils le sont tous les 2 (sinon ...)

Posons $\begin{cases} \alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 1 \\ \beta_{n+1} = 2\beta_n + 1 \end{cases}$. $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow \alpha_n + \beta_n + 1 = 2^n$

$$f\left(\frac{2\alpha_n+1}{2^{n+1}} x + \frac{2\beta_n+1}{2^{n+1}} y\right) = f\left(\frac{\frac{2\alpha_n+1}{2^n} x + \frac{2\beta_n+1}{2^n} y}{2}\right)$$

$$= f\left(\frac{\left(\frac{\alpha_n}{2^n} x + \frac{\beta_n+1}{2^n} y\right) + \left(\frac{\alpha_n+1}{2^n} x + \frac{\beta_n}{2^n} y\right)}{2}\right)$$

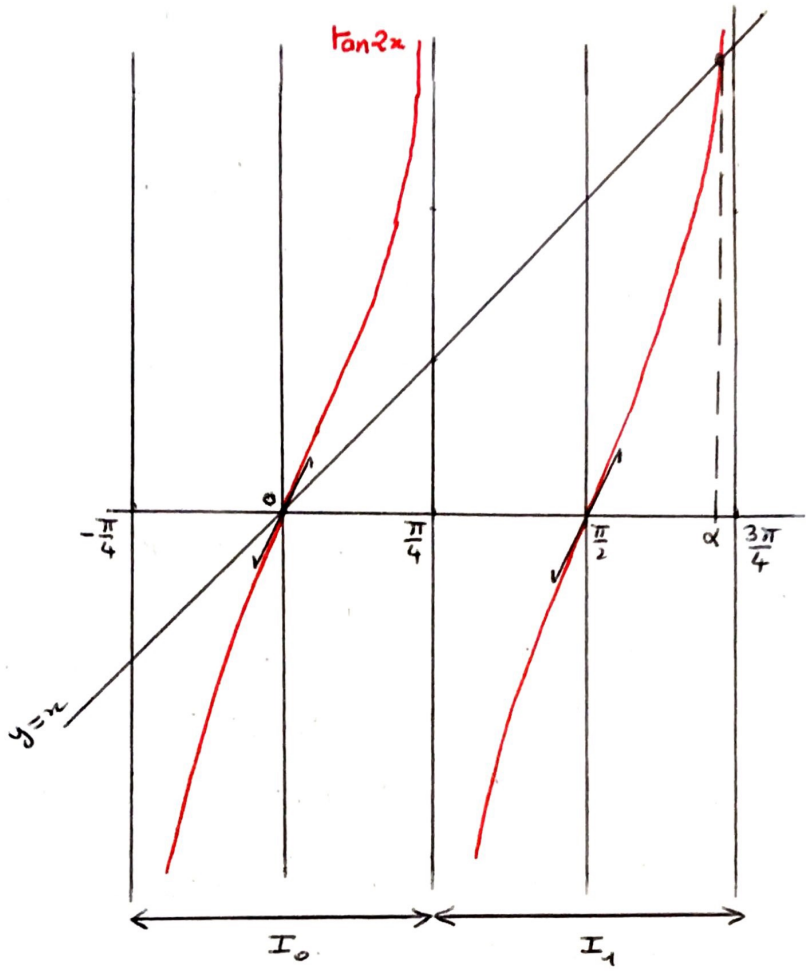
$$\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{\alpha_n}{2^n} x + \frac{\beta_n+1}{2^n} y\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{\alpha_n+1}{2^n} x + \frac{\beta_n}{2^n} y\right)$$

dernier membre qui sera inférieur à $\frac{2\alpha_n+1}{2^{n+1}} f(x) + \frac{2\beta_n+1}{2^{n+1}} f(y)$ par application de l'hyp. récurrente.

TSVP

③

a) ci-contre



b) $\left.\begin{array}{l}\tan 2x = x \\ x \in I_n\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x = \operatorname{Arctan} x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x \in I_n\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + k\frac{\pi}{2} \\ x \in I_n\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + n\frac{\pi}{2}$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)}$ donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

L'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad |f(x) - f(y)| \leq \sup_{c \in]x,y[} |f'(c)| \cdot |x-y| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

et f sera $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Enfin $f(\overline{I}_n) \subset I_n \subset \overline{I}_n$.

$\overline{I}_n$ étant un compact, le Th. du pt fixe montre l'existence et l'unicité d'une solution α de $f(x) = x$ dans $\overline{I}_n$.

Si $x_0 \in \overline{I}_n$ et $x_{p+1} = f(x_p)$, la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers α.

<u>NB</u> : Si $n=1$ et $x_0 = \frac{\pi}{2} \in \overline{I}_1$, on trouve

$x_1 = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \simeq 2{,}072738738$

....

$x_5 \simeq 2{,}137386815$ (x_5 est une approximation de α à 10^{-4} près)

Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

1992/93
LIV M12
Analyse
(DeugA1-1e Année)

Travaux dirigés n° 3

① Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a,b]$. $S_a^b(f,X)$ et $\mathcal{S}_a^b(f,X)$ désignent respectivement les sommes de DARBOUX supérieures et inférieures relatives à une subdivision X de $[a,b]$.

1) Montrer $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall X$, $S_a^b(\lambda f, X) = \lambda S_a^b(f,X)$ et $\mathcal{S}_a^b(\lambda f, X) = \lambda \mathcal{S}_a^b(f,X)$.

2) En déduire que λf est intégrable pour tout λ positif.

3) Montrer que $\forall \lambda > 0$, on a : $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

4) Traiter le cas où $\lambda < 0$.

② En utilisant les sommes de Rieman, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ dans les cas suivants :

a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n+k}{n^2+k^2}$

b) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$

c) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}}$

③ On considère la fonction f définie de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable et à dérivée intégrable.

Soient $S_n' = \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right) f'\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$

et $S_n = \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1)\dfrac{b-a}{n}\right) f'\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - S_n')$. En déduire la $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4° On considère une fonction f définie de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue, positive et telle que $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b [f(x)]^n\,dx\right]^{\frac{1}{n}} = M.$$

5° Déterminer les primitives suivantes :

a) $I_a = \int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

b) $I_b = \int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$

c) $I_c = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}x\sqrt{\operatorname{ch}2x}}$

d) $I_d = \int \frac{x^4+4x}{(x^2-1)^3}\,dx$

e) $I_e = \int \frac{dx}{\cos x+\cos 3x}$

f) $I_f = \int \frac{dx}{\sin x-\cos x+\sqrt{2}}$

Indications : a) Poser $u^2 = 1+e^x$; b) Poser $y = \frac{1}{x}$ et $t = \sqrt[3]{1+y^3}$

6° En utilisant une des formules de la moyenne, montrer qu'il existe deux valeurs x_1 et x_2 dans $[0;1]$ telles que :

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2} = \frac{2}{\pi(1+x_1^2)} = \frac{\pi}{4}\sin \pi x_2.$$

7° On considère une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continue, et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_a^b f(x+t)\cos t\,dt$.
A l'aide du changement de variable $x+t = u$, montrer que g admet une dérivée continue sur $\mathbb{R}$.

8° Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

(9°) Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}$. De cette étude, déduire la valeur de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\,dx$.

(10°) Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $I_a = \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$

b) $I_b = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$

c) $I_c = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\cos x)^{\frac{1}{n}}}$ pour $n > 1$.

d) $I_d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \log(\tan x)\,dx$

e) $I_e = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$

f) $I_f = \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{Arccos}(x-1)}$ → plutôt $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\operatorname{Arccos}(x+1)}$

g) $I_g = \int_{-1}^1 \frac{2^{\operatorname{Arcsin} x}}{1-x}\,dx$

h) $I_h = \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$

(11°) Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{8}$.

(12°) Si n est un réel, démontrer que $\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$ converge si $n > 0$ et diverge si $n \leq 0$.

(13°) 1) Montrer que $\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx = 0$.

2) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx$.

(14°) On considère une fonction f admettant une dérivée première et une dérivée seconde continue et on suppose que

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} [f''(x)]^2\,dx \quad \text{convergent.}$$

En utilisant le critère de Cauchy pour les intégrales (énoncé dans l'exercice III du devoir libre n°3), montrer que

$\int_0^{+\infty} [f'(x)]^2\,dx$ converge

15. Démontrer que $\int^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ n'est pas absolument convergente.

(Indication : montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$)

16. On considère la suite $(I_n)_n$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}\,dx.$$

1) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}

2) En déduire une expression de I_n.

Corrigé du TD n°3 (Troupé)

LVM12
Analyse
1992/93

1°

1) Evident ($\Leftarrow$ propriétés des bornes supérieures et inférieures)

2) $\sup_X \mathcal{S}_a^b(\lambda f, X) = \lambda \sup_X \mathcal{S}_a^b(f, X) = \lambda \inf_X \mathcal{S}_a^b(f, X) =$

Donc f intégrable $\rightarrow \lambda f$ intégrable

3) Evident.

4) $\lambda < 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{S}_a^b(\lambda f, X) = \lambda \mathcal{S}_a^b(f, X) \\ \mathcal{S}_a^b(\lambda f, X) = \lambda \mathcal{S}_a^b(f, X) \end{cases}$

2°

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k/n}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

où $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$. Donc $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

$\left(\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt}_{x=\tan t} + \left[\frac{\ln x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \right)$

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

$f(x) = x \sin \pi x$ et $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 x(\sin \pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}$

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2 \sqrt[3]{n^3+k^3}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{\sqrt[3]{1+(k/n)^3}}$

$f(x) = x^2 / \sqrt[3]{1+x^3}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx = \left[\frac{1}{2}(1+x^3)^{\frac{2}{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$

3°

$S_n - S_n' = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f'\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\left[f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right]$

Continuité de $f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n' / \forall n > n'$

$|S_n - S_n'| < \varepsilon \cdot \frac{b-a}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} f'\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right|$

f' et $|f'|$ intégrables $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n'' / \forall n > n''$ et $n > n'$

$|S_n - S_n'| < \varepsilon \int_0^1 |f'(x)|\,dx$ d'où $\lim_{n\to+\infty}(S_n - S_n') = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_n' = \int_a^b f(x)f'(x)\,dx.$$

4° Continuité de f sur $[a,b] \Rightarrow \exists x_0 \in [a;b]$ tel que $x_0 = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = M$, soit : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \,/\, |x - x_0| < \eta$

$$\Rightarrow M - \varepsilon < f(x) < M.$$

On a donc :

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} (M-\varepsilon)^n dx \leq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} (f(x))^n dx \leq \int_a^b (f(x))^n dx \leq \int_a^b M^n dx$$

et $$(M-\varepsilon)(\eta)^{\frac{1}{n}} \leq \left[\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f^n(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}} \leq \left[\int_a^b f^n(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$$

d'où $$M-\varepsilon \leq \underline{\lim}\left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}\left[\int_a^b f^n(x)\right]^{\frac{1}{n}} \leq M$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b f^n(x)\right]^{\frac{1}{n}} = M.$$

5° a) $u^2 = 1+e^x$ (où $u>1$); $2u\,du = e^x dx$, $x = \ln(u^2-1)$

$$\begin{aligned} I_a &= 2\int \ln(u^2-1)\,du \\ &= 2\left[(u-1)\ln(u-1) + (u+1)\ln(u+1) - 2u\right] + c \\ &= 2\left[u\ln(u^2-1) - 2u - \ln(u^2-1) + 2\ln(u+1)\right] + c \\ &= 2\left[(x-2)\sqrt{1+e^x} - x + 2\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)\right] + c \end{aligned}$$

b) $y = \frac{1}{x}$; $dy = -\frac{1}{x^2}dx$; $t = \sqrt[3]{1+y^3}$; $dt = y^2(1+y^3)^{-\frac{2}{3}}dy$

$$I_b = -\int \frac{\sqrt[3]{1+y^3}}{y}dy = -\int \frac{t^3}{t^3-1}dt =$$

Or $\frac{t^3}{t^3-1} + 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+2}{t^2+t+1}\right)$

Donc $$I_b = -t - \frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{}\left[\int\frac{(2t+1)dt}{t^2+t+1} + \int\frac{3}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt\right]$$

$$= -t - \frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

c) $I_c = \int \frac{du}{u\left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{u^2+u^{-2}}{2}\right)}}$ où $u = e^x$ et $du = u\,dx$

$= \int \frac{2\sqrt{2}\,u\,du}{(u^2+1)\sqrt{(u^4+1)}}$ où $v = u^2$ et $dv = 2u\,du$

$= \int \frac{\sqrt{2}\,dv}{(v+1)\sqrt{v^2+1}}$ où $v = u^2$ et $dv = 2u\,du$

$= \int \frac{\sqrt{2}\,dt}{sh\,t+1}$ où $v = sh\,t$ et $dv = ch\,t\,dt$

$= \int \frac{2\sqrt{2}\,e^t dt}{e^{2t}+2e^t-1} = \int \frac{2\sqrt{2}\,e^t dt}{(e^t+1)^2-2} = \int \frac{\sqrt{2}\,e^t dt}{\left(\frac{e^t+1}{\sqrt{2}}\right)^2-1}$

$= 2\int \frac{ds}{s^2-1}$ où $s = \frac{e^t+1}{\sqrt{2}}$

$= \ln|s-1| - \ln|s+1| + c$

On a $s = \frac{e^t+1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(ch\,t + sh\,t + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \sqrt{1+v^2} + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u^2+1+\sqrt{1+u^4}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{2x}+1+\sqrt{1+e^{4x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\,ch\,x}{e^{2x}} + \sqrt{\frac{2\,ch\,2x}{e^{4x}}}\right)$

d'où $I_b = \ln\left|\frac{2\,ch\,x+\sqrt{2\,ch\,2x}-\sqrt{2}}{2\,ch\,x+\sqrt{2\,ch\,2x}+\sqrt{2}}\right| + c$

d) $I_d = \int \frac{x^4+4x}{(x^2-1)^3}dx = \left[-\frac{1}{4(x^2-1)^2}\cdot(x^3+4)\right] + \frac{1}{4}\int \frac{3x^2}{(x^2-1)^2}dx$

$= \frac{-(x^3+4)}{4(x^2-1)^2} - \frac{3}{8}\left[\frac{1}{(x^2-1)}\cdot x\right] + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x^2-1}$

$= \frac{-(x^3+4)}{4(x^2-1)^2} - \frac{3}{8}\frac{x}{(x^2-1)} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

e) Poser $t = \sin x$.

On a : $\frac{1}{\cos x + \cos 3x} = \frac{1}{\cos x + \cos x\cos 2x - \sin 2x \sin x}$

$= \frac{1}{\cos x + \cos x(2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x)} = \frac{1}{\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x}$

$= \frac{\cos x}{4\cos^4 x - 2\cos^2 x} = \frac{\cos x}{2\cos^2 x(2\cos^2 x - 1)}$

D'où $I_e = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{-1}{1-t^2} + \frac{2}{1-2t^2}\right)dt$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{-1}{2(1-t)} - \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{(1-\sqrt{2}t)} + \frac{1}{(1+\sqrt{2}t)}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\sin x}\right| + c$$

f) $I_f = \int \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos x}{\sqrt{2}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cot an\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) + c$$

6° Application de la formule de la moyenne :

$\exists x_0 \in [a,b] / \int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx$

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}dx = \frac{1}{1+x_1^2}\int_0^1 \sin \pi x\, dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+x_1^2}$$

$$= \sin \pi x_2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}\sin \pi x_2$$

7° En posant $x+t=u$, on a :

$$g(x) = \int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos(u-x)\,du = \cos x\int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos u\,du + \sin x\int_{a+x}^{b+x} f(u)\sin u\,du$$

Les fonctions f, cos et sin étant continues, on a :

$$\left.\begin{aligned} g'(x) = &-\sin x\int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos u\,du + \cos x\int_{a+x}^{b+x} f(u)\sin u\,du \\ &+ f(b+x)\underbrace{[\cos x\cos(b+x) + \sin x\sin(b+x)]}_{\text{c'est } \cos b} \\ &- f(a+x)\underbrace{[\cos x\cos(a+x) + \sin x\sin(a+x)]}_{=\cos a} \end{aligned}\right\}$$

g' est continue sur $\mathbb{R}$.

8° $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$. Condition suffisante : $-1 \notin \left[\frac{1}{x} ; x^2\right]$ d'où $\frac{1}{x} > -1$, soit $x < -1$ ou $x > 0$.

Convergence de l'intégrale :

$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ converge car pour $t \in]-1,1]$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1+t)(t^2-t+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1+t}}$$

De même, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ converge car pour $t>0$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} < \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

Domaine de définition de $f =]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[$

9°) Pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{2x}{\log x^2} - \frac{1}{\log x} = \frac{x-1}{\log x}$$

et $\lim_{x\to 1} f'(x) = 1$, $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

$P^{\underline{b}}$: $\lim_{x\to 1} f(x) = ?$

Au voisinage de 1 on a $\frac{1}{\log t} \approx \frac{1}{t-1}$,

faux d'où $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \lim_{x\to 1} \log|x+1| = \ln 2$.

E f est donc dérivable sur $]0;1[$ et par prolongement on a la continuité de f sur $[0;1]$.

Par conséquent, $\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}dx = \int_0^1 f'(x)\,dx = f(1)-f(0) = \log 2$.

10°)

a) $I_a = \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$ converge car :

Au voisinage de 1, $\frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} \simeq \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ dont l'intégrale converge.

Au voisinage de 5, $\frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} \simeq \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$ " " " .

(Calcul : $I_a = \int_1^5 \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}} = 2 \operatorname{Arcsin} 1 = \pi$.)

b) $I_b = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^3}dx$ diverge car

au voisinage de 0 $\sin x \simeq x$, d'où $\frac{\sin x}{x^3} \simeq \frac{1}{x^2}$ dont l'intégrale diverge.

c) $I_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\cos x)^{\frac{1}{n}}}$ $\quad n > 1.$ $\quad$ P^{b} en $\frac{\pi}{2}$.

En posant $x = y + \frac{\pi}{2}$, on a $\cos x = -\sin y$.

Donc pour x au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ on a $\sin y \simeq y$ soit

$\cos x \simeq -x + \frac{\pi}{2}$.

Pour $n > 1$, I_c converge.

d) $I_d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \log(\tan x)\, dx$

Au voisinage de 0, $\tan x \simeq x$, d'où I_d converge en 0.

En $\frac{\pi}{2}$ on a : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x \log(\tan x) = -\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x \log(\cos x) = 0$.

I_d est donc convergente.

(Calcul : $I_d = -\log 2$)

e) $I_e = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx$. $\quad$ P^{b} en 0.

I_e converge car au voisinage de 0, $\log(\sin x) \simeq \log x$

(Calcul : $I_e = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Ln}(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Ln}(\cos y)\, dy$ $\quad$ où $y = \frac{\pi}{2} - x$

Donc $2 I_e = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Ln}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Ln}(\sin X)\, dX - \frac{\pi}{2} \log 2$ où $X = 2x$

$I_e = -\frac{\pi}{2} \log 2$)

f) $I_f = \int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{Arccos}(x-1)}$ $\quad$ P^{b} en 0.

faux. $\mathrm{Arc}\cos(-1) = +\pi$ donc pas de Pb en 0.
D'ailleurs $\mathrm{Arc}\cos(x-1) \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ quand $x \in [0,1]$.
La fct est continue sur $[0,1]$.

On pose $x = 1 - \cos t \Rightarrow dx = \sin t\, dt$

$I_f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\, dt$ qui converge.

mettre $x+1$ et intégrer sur $\int_{-1}^{0}$ et ça marche

g) $I_g = \int_{-1}^{1} \frac{2^{\mathrm{Arcsin}\, x}}{1-x}\, dx$ $\quad$ P^{b} en 1.

Au voisinage de 1, $\frac{2^{\mathrm{Arcsin}\, x}}{1-x} \simeq \frac{2^{\frac{\pi}{2}}}{1-x}$ et pour $a \in]-1, 1[$

on a :

$$\int_{-1}^{a} \frac{2^{\frac{\pi}{2}}}{1-x}\, dx = \left[-2^{\frac{\pi}{2}} \ln|1-x|\right]_{-1}^{a} = -2^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln|1-a| - \ln 2\right)$$

Donc $\lim\limits_{a \to 1^-} \int_{-1}^{a} \frac{2^{\frac{\pi}{2}}}{1-x}\, dx = +\infty$.

I_g est donc divergente.

h) $I_h = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$

Pour $\alpha > 0$, $\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{\alpha}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha \to 0^+} -\log \alpha = +\infty$

Pour $\alpha < 0$ $\lim_{\alpha \to 0^-} \int_{-1}^{\alpha} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha \to 0^-} \log|\alpha| = -\infty$

I_h est divergente.

11°

$$x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

On a $\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{8}\left[\frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{x-2}{x^2-2x+2}\right]$

$$I_y = \int_0^y \frac{dx}{x^4+4} = \frac{1}{16}\int_0^y \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\right)dx$$

$$+ \frac{1}{8}\int_0^y \left(\frac{1}{(x+1)^2+1} + \frac{1}{(x-1)^2+1}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{Arctan}(x+1) + \frac{1}{8}\operatorname{Arctan}(x-1)\right]_0^y$$

$$\lim_{y \to +\infty} I_y = \frac{1}{16}\ln 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

12. $I = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$

Quand $x \to +\infty$, on a $x^{n-1}e^{-x} < \frac{1}{x^2}$, d'où $\int_1^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$ converge $\forall n$.

Au voisinage de 0, on a $e^{-x}x^{n-1} \simeq x^{n-1}$, d'où pour $\alpha > 0$ $\int_{\alpha}^{1} x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} - \frac{\alpha^n}{n} \Rightarrow I$ converge si $n > 0$ et I diverge si $n < 0$.

Si $n = 0$, $\int_{\alpha}^{1} x^{n-1}\,dx = -\log \alpha \Rightarrow I$ diverge.

(13°) 1.) $-\int_0^{2\pi}\frac{dx}{n^2} \leq \int_0^{2\pi}\frac{-1}{x^2+n^2}dx \leq \int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx \leq \int_0^{2\pi}\frac{dx}{x^2+n^2} \leq \int_0^{2\pi}\frac{dx}{n^2}$

d'où $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx = 0$

2.) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx$.

Par 1 intégration par parties on obtient:

$$I_n = \left[-\cot an\, x.\sin^2 nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx\cos nx}{\tan x}dx$$

$$= n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\tan x}dx \quad \text{(Prolongement par continuité en 0)}$$

$$\frac{1}{n}I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 2nx}{x} + \frac{x-\tan x}{x\tan x}\sin 2nx\right)dx$$ INC

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{x}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

(14°) $\int_0^{y_2}\left[f'(x)\right]^2dx = \left[f(x)f'(x)\right]_0^{y_2} - \int_0^{y_2}f(x)f''(x)dx$

* De l'inégalité de Schwartz on déduit que $\forall (y_1,y_2)\in\,]0;+\infty[$,

$$\left|\int_{y_1}^{y_2}f(x)f''(x)dx\right| \leq \int_{y_1}^{y_2}f^2(x)dx.\int_{y_1}^{y_2}\left[f''(x)\right]^2dx$$

Par utilisant le critère de Cauchy pour les intégrales, on aboutit à la convergence de $\int_0^{+\infty}f(x)f''(x)dx$.

* On montre par l'absurde que $\lim_{y\to+\infty}f(y)f'(y)$ est finie.

On a $\int_0^y f(x)\, f'(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(f^2(y) - f^2(0)\right)$

donc $\lim_{y \to +\infty} \int_0^{+y} f(x) f'(x)\, dx \in \mathbb{R}$.

MR – cf $\boxed{T}$ Int gén

Si on avait $\lim_{y \to +\infty} f(y) f'(y) = +\infty$ (hypothèse justifiée par le fait que $\int_0^y f'^2(x)\, dx \geq 0$), on obtiendrait aussi

$\lim_{y \to +\infty} \int_0^y f(x) f'(x)\, dx = +\infty$.

(15°)

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

à justifier (OK)

Pour $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, on a :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\, dx = \left|\frac{1}{(k+1)\pi}\left[-\cos x\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\right|$$

d'où $\left|\frac{-(-1)^{k+1} + (-1)^k}{(k+1)\pi}\right| = \frac{2}{(k+1)\pi} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$

et $\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$

Comme $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ diverge, on a

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$ d'où le résultat.

(16°) $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}\, dx$ est convergente.

1) $I_{n-1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^{3/4}} (1-x)^{-\frac{1}{4}+1}\, dx$

En faisant une intégration par partie ($u'(x) = x^{n-1-3/4}$, $v(x) = (1-x)^{\frac{3}{4}}$) on aboutit à :

$$I_{n-1} - I_n = \frac{3}{4n-3} I_n \quad \text{d'où} \quad I_n = \frac{4n-3}{4n} I_{n-1}$$

2.)

$$I_n = \frac{1.5.9 \ldots (4n-3)}{n!\ 4^n} I_0$$

DJM

Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

1992/93
Deug A1-1e Année
UVM12-Analyse

Devoir libre n°3

I) On considère la fonction f définie sur $[a;+\infty[$, $(a>0)$, positive et décroissante. On définit la suite $A_n (n\geq 1)$ par :

T intégré

$$A_n = f(a) + f(a+1) + \dots + f(a+n)$$

1) Montrer que $A_n - f(a) \leq \int_a^{a+n} f(x)\,dx \leq A_{n-1}$.

2) En déduire que la suite A_n est de même nature que l'intégrale $\int_a^{a+n} f(x)\,dx$ lorsque n augmente indéfiniment, c'est à dire qu'elle converge si l'intégrale admet une limite et qu'elle diverge dans le cas contraire.

3) Montrer que la suite $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha < 1$.

II) Extrait de l'examen de Juin 1991

T int. gévé

On considère la fonction réelle φ définie par $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$.

1) Déterminer l'intervalle I de $\mathbb{R}$, ensemble de définition de la fonction φ.

question inutile [2) Montrer que $\forall x \in I$, $\varphi(x) + \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-xt}}{1+t}\,dt = \frac{1}{x}$

3) En déduire que $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt$.

4°) a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n} dt = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire un équivalent de $\varphi(x)$ au voisinage de $+\infty$.

III) On définit le critère de Cauchy pour les intégrales de la manière suivante :

T Int. généré.

E { h étant une fonction localement intégrable sur un ouvert $]a;b[$ (plutôt $[a,b[$) de $\mathbb{R}$, alors $\int_a^b h(t)\,dt$ converge si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists b_0 \in]a,b[/ \forall x > b_0$ et $\forall x' > b_0$ $((x,x') \in]a;b[^2)$

$$\left| \int_a^x h(t)\,dt - \int_a^{x'} h(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

1°) Soit une fonction f définie de $[a;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est décroissante, dérivable, à dérivée continue et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Soit une fonction g définie de $[a;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est continue sur $[a;+\infty[$ et qu'il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (x,x') \in [a;+\infty[^2$ on a :

$$\left| \int_x^{x'} g(t)\,dt \right| < A$$

Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$ est convergente en utilisant le critère de Cauchy.

2°) Application : etudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

LVM/12
Analyse
1992/93

Corrigé du Devoir libre n°3

I) 1) On a : $\displaystyle\int_a^{a+n} f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a+j}^{a+j+1} f(x)\,dx$

f étant décroissante, on a :

$\forall j \in \{0, \dots, n-1\}$, $\displaystyle\int_{a+j}^{a+j+1} f(a+j+1)\,dx \leq \int_{a+j}^{a+j+1} f(x)\,dx \leq \int_{a+j}^{a+j+1} f(a+j)\,dx$

d'où $A_n - f(a) \leq \displaystyle\int_a^{a+n} f(x)\,dx \leq A_{n-1}$.

2) La suite $\left(\displaystyle\int_a^n f(x)\,dx\right)_n$ est croissante car f est positive.

Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$, alors A_n est convergente car A_n est croissante et majorée par $f(a) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ (d'après 1)).

Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(x)\,dx = +\infty$, alors on déduit aussi de 1) que A_n est divergente.

topologie
A préciser

3) On pose $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ et $a = 1$.

f est évidemment positive et décroissante sur $[1; +\infty[$ si $\underline{\underline{\alpha \geq 0}}$

En utilisant 1) et 2), on obtient que la suite A_n définie par $A_n = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dots + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$ pour $\alpha \neq 1$.

Par conséquent, si $0 \leq \alpha < 1$, $1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dots + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ diverge, et si $\alpha > 1$, la suite converge

cas : $\alpha = 1$: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\displaystyle\int_1^n f(x)\,dx = \log n$.

La suite est divergente.

cas : $\alpha < 0$

1) et 2) sont alors inapplicables car f_n n'est pas décroissante.

La suite est divergente car

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{\alpha}} = \sum_{j=1}^{n} e^{-\alpha \log j} \geq n.$$

II) 1) $I = \mathbb{R}_+^*$

2) $$\Phi(x) + \int_0^{\infty} \frac{t e^{-xt}}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

3) : 2) $\Rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{1+t} dt$

Intégration par partie de $\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{1+t} dt$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{1+t} dt = -\left[\frac{t}{1+t} \cdot \frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} \frac{e^{-xt}}{x} dt$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt$$

On a donc :

$$\Phi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt$$

4) a) On a :

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n} < e^{-xt}$$

d'où $0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n} dt < \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$

et $\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n} dt = 0$

b) De 3) on déduit que $\Phi(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

III) 1) On pose $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ et on a d'une part $|G(x)| \leq A$ et d'autre part :

$\forall (x, x') \in [a; +\infty[^2$,

$$\int_x^{x'} f(t)g(t)\,dt = \left[f(t)G(t)\right]_x^{x'} - \int_x^{x'} f'(t)G(t)\,dt$$

Comme f est décroissante, sa dérivée est négative.
De plus, comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, f est positive.
On en déduit que :

$$\left|\int_x^{x'} f(t)g(t)\,dt\right| \leq A\left[f(x) + f(x')\right] + A\int_x^{x'} -f'(t)\,dt$$

soit $\left|\int_x^{x'} f(t)g(t)\,dt\right| \leq 2Af(x)$

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, le critère de Cauchy permet de conclure que $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ converge.

2) • $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ On pose $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $g(t) = \sin t$

f et f' sont continues en 0 par prolongement. g est continue et bornée.

E

1) est donc applicable.

Université des antilles
et de la Guyane
U.F.R Sciences
Département de Mathématique
et Informatique.

Année 1992-1993
DEUG A_1 1ère Année
U.V. M 12

Analyse

TD 4

Exercice 1 Etudier et représenter les courbes suivantes:

a) $x = \dfrac{t^2-1}{t}$; $y = \dfrac{t+1}{t(t-1)}$

b) $x = \sin 3t + 3\sin t$; $y = \cos t + \sin t$

c) $x = e^t - t$; $y = \operatorname{ch} t - \dfrac{t^2}{2}$

d) $x = \cos 3t$; $y = \cos 4t$

Exercice 2 Etudier et représenter les courbes suivantes:

a) $\rho = -\cos(2\theta)/\sin\theta$

b) $\rho = \dfrac{\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{sh}\theta - \operatorname{ch}\theta}$

c) $\rho = \dfrac{\sin\theta\,(\sin\theta+1)}{\cos\theta}$

d) $\rho = 2\cos\theta - \cos 2\theta$.

Remarque. Dans chaque cas on étudiera les points stationnaires et les tangentes en ces points ; les tangentes parallèles aux axes ; les points doubles et les tangentes en ces points ; les branches infinies.

92-93

Deug A_1 - 1 année

u.v. M12

M12 Analyse TD 4

Corrigé

Exercice 1

a) $x' = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$: $y' = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{(t-1)^2}$

t	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}-1$		1	
x'			$+$				$+$			
x	$-\infty$	↗	-2	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-2	↗ 0	↗ $+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	‖	$-$
y	0	↘	$2\sqrt{2}-3$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$-3-2\sqrt{2}$	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 0

- $\frac{y}{x} = \frac{1}{(t-1)^2} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$; $y - x = \frac{2}{t-1} - t = -2(1 + t + o(t)) - t$

$$y - x = -2 - 3t + o(t)$$

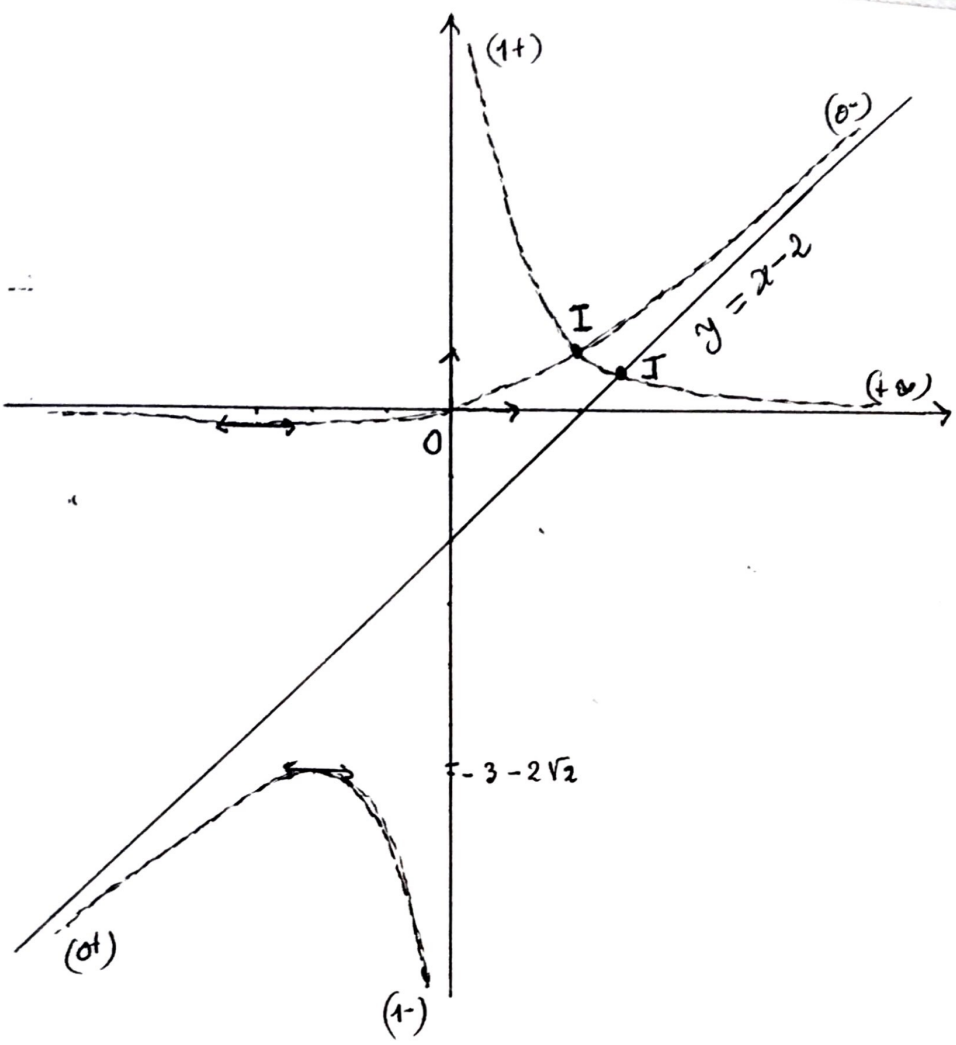
La courbe (C) admet la droite $y = x - 2$ comme asymptote

(C) coupe l'asymptote en un point de paramètre t tel que

$\frac{2}{t-1} - \frac{1}{t} = t - \frac{1}{t} - 2$ ie $t^2 - 3t = 0$ d'où $t = 3$: $J\begin{pmatrix} 8/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

- Point double $\begin{cases} t_1 - \frac{1}{t_1} = t_2 - \frac{1}{t_2} \\ \frac{2}{t_1 - 1} - \frac{1}{t_1} = \frac{2}{t_2 - 1} - \frac{1}{t_2} \end{cases}$ $(t_1 \neq t_2)$

on trouve $t_1 t_2 = -1$ et $t_1 + t_2 + t_1 t_2 - 1 = 0$ d'où t_1 et t_2 solutions de $t^2 - 2t - 1 = 0$: $t_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $t_2 = 1 - \sqrt{2}$: $I\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



b) $\begin{cases} x = \sin 3t + 3\sin t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$

(c) est décrite sur $[0, 2\pi[$; $x(t+\pi) = -x(t)$ et $y(t+\pi) = -y(t)$

d'où étude sur $[0,\pi]$: (Il y a symetrie /O)

$\begin{cases} x' = 6\cos 2t . \cos t \\ y' = \sqrt{2}\cos(t+\frac{\pi}{4}) \end{cases}$; le point de parametre $\frac{\pi}{4}$ est stationnaire

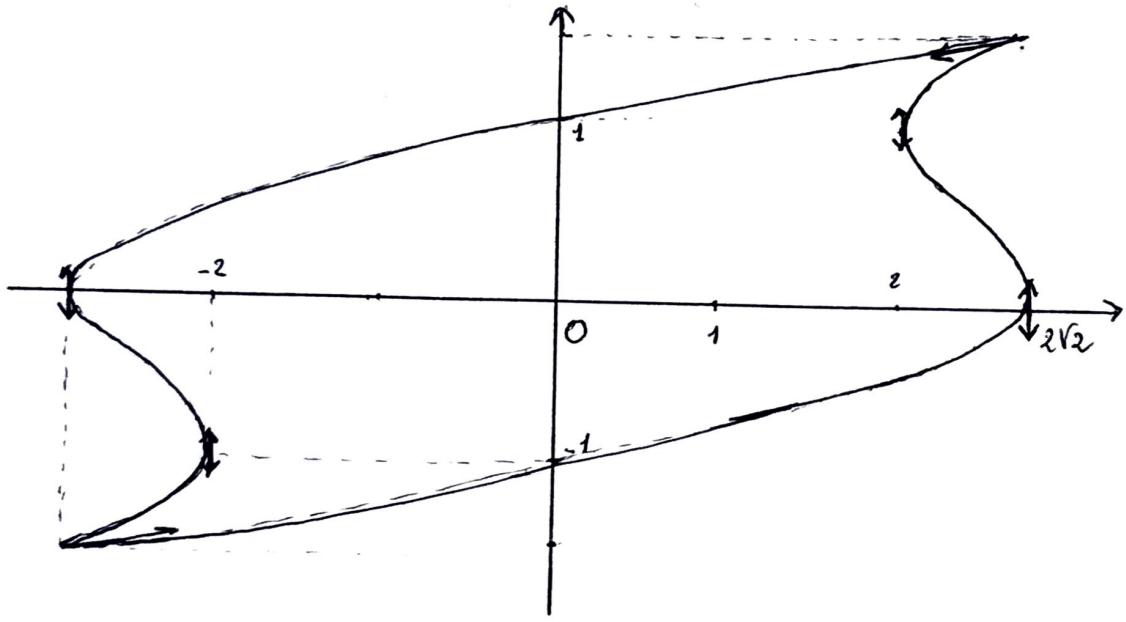
t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
x'		+	0	−	0	+	0	−	
x	0	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	0
y'		+	0			−			
y	1	↗	$\sqrt{2}$	↘				↘	−1

- <u>Etude du point stationnaire</u>

$$\begin{cases} x'' = -9\sin 3t - 3\sin t \\ y'' = -\sin t - \cos t \end{cases} \qquad \vec{V}''_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ dirige la tangente}$$

$$\begin{cases} x''' = -27\cos 3t - 3\cos t \\ y''' = -\cos t + \sin t \end{cases} \qquad \vec{V}'''_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} \begin{pmatrix} 12\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ non colinéaire à } \vec{V}''_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

rebroussement de 1ère espèce.



c) $\begin{cases} x = e^t - t \\ y = \operatorname{ch} t - \frac{t^2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = e^t - 1 \\ y' = \operatorname{sh} t - t \end{cases}$

- <u>branches infinies</u>

$\frac{y}{x} \underset{-\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2}e^{-t}}{-t} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ branche parabolique dans la direction oy

$\frac{y}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2}e^{t}}{e^t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$; $y - \frac{1}{2}x = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

branche parabolique de direction $y = \frac{1}{2}x$

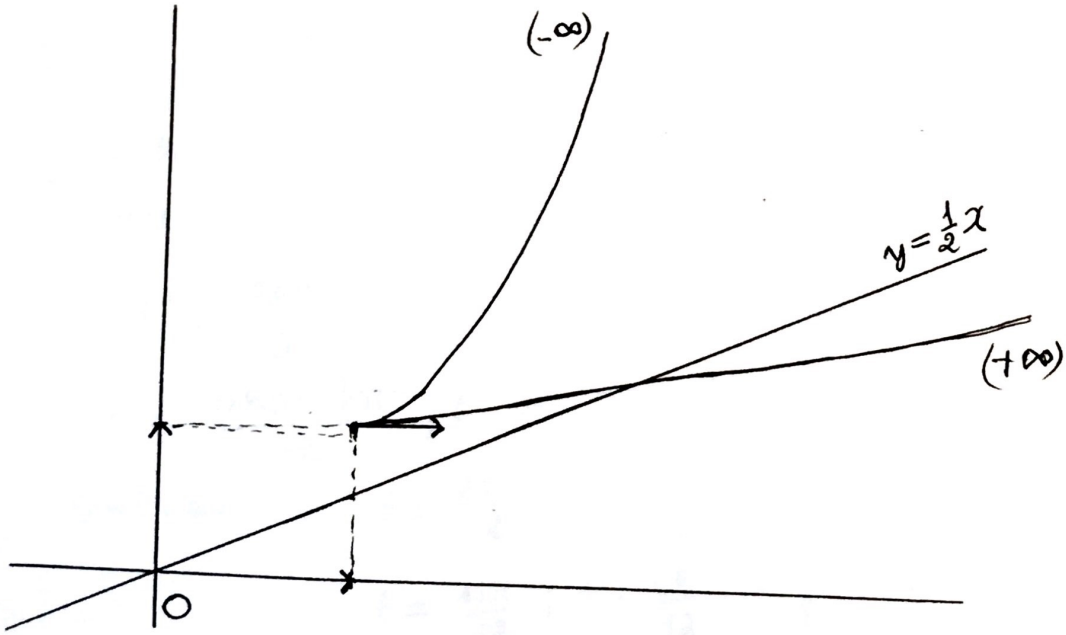
- <u>Point stationnaire</u> $t=0$

$$\begin{cases} x'' = e^t \\ y'' = \operatorname{ch} t - 1 \end{cases} \qquad \vec{V}''_{(0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dirige la tangente}$$

$$\begin{cases} x''' = e^t \\ y''' = \operatorname{sh} t \end{cases} \qquad \vec{V}'''_{(0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{cases} x^{(4)} = e^t \\ y^{(4)} = \operatorname{ch} t \end{cases} \qquad \vec{V}^{(4)}_{(0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Point de rebroussement de 2ème espece.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



d) $\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \cos 4t \end{cases}$

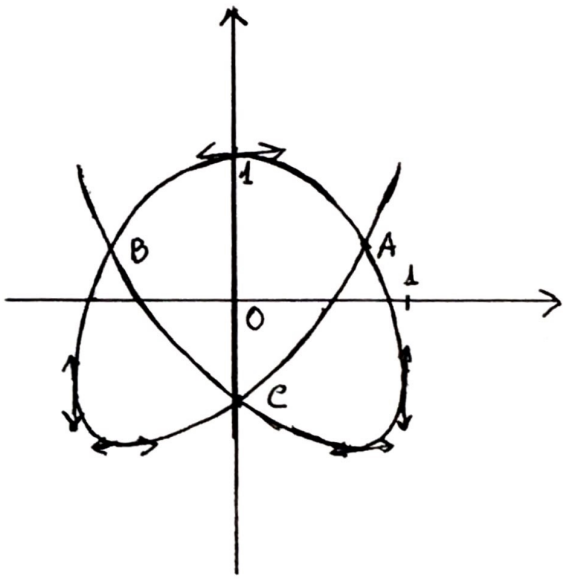
x et y sont 2π-périodiques et paires $\Rightarrow$ étude sur $[0,\pi]$

Comme $x(\pi-t) = -x(t)$ et $y(\pi-t) = y(t)$ (C) est symétrique / $y'y$

d'où étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$\begin{cases} x' = -3\sin 3t \\ y' = -4\sin 4t \end{cases}$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$-$		$-$	0	$+$	
x	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
y'	0	$-$	0	$+$		$+$	$\overset{*}{0}$
y	1	$\searrow$	-1	$\rightarrow$	$-1/2$	$\nearrow$	1



Points doubles

$\begin{cases} \cos 3t - \cos 3t' = 0 \\ \cos 4t - \cos 4t' = 0 \end{cases}$ $t \neq t'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sin\left[\frac{3}{2}(t+t')\right]\sin\left[\frac{3}{2}(t-t')\right] = 0 \\ -2\sin(2(t+t'))\sin(2(t-t')) = 0 \end{cases}$ $t \neq t'$

$t+t' = \frac{2k\pi}{3}$ et $t-t' = \frac{k'\pi}{2}$ car $M(t) = M(-t)$

$t = \frac{4k\pi + 3k'\pi}{12}$, $t' = \frac{4k\pi - 3k'\pi}{12}$

On trouve : $t = \frac{7\pi}{12}$; $t' = \frac{\pi}{12}$ le point double A $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$t = \frac{11\pi}{12}$; $t' = \frac{5\pi}{12}$ le point double B $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$t = \frac{5\pi}{6}$; $t' = \frac{\pi}{6}$ le point double C $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

Exercice 2

a) $\rho = -\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$: $D_\rho = \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta) \Rightarrow M(\theta+2\pi) = M(\theta)$

$\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta) \Rightarrow M(\theta+\pi) = M(\theta)$

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta) \Rightarrow M(\theta)$ et $M(-\theta)$ sym/oy

On etudie (C) sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et on effectue la sym: par rapp à oy

$\rho'(\theta) = \dfrac{\cos\theta[1+2\sin^2\theta]}{\sin^2\theta}$, $\rho'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
$\rho'(\theta)$	‖	$+$	0
$\rho(\theta)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

$x = -\dfrac{\cos(2\theta)\cos\theta}{\sin\theta}$ $\qquad \lim\limits_{\theta \to 0^+} x = -\infty$

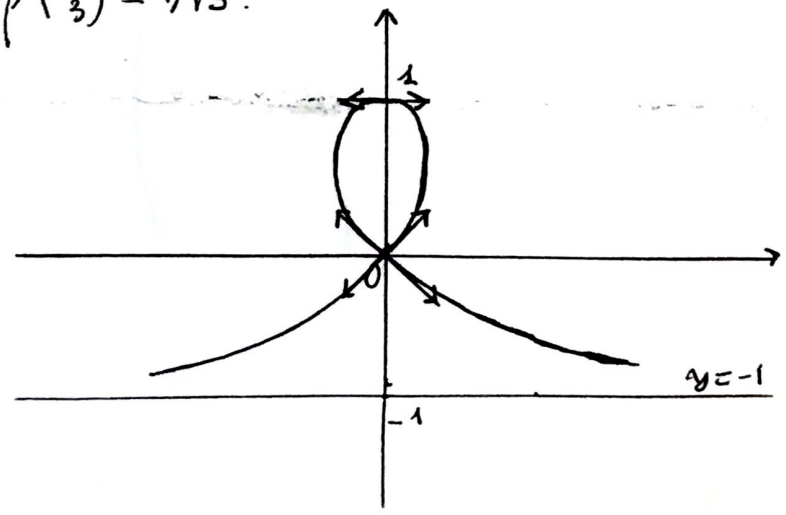
$y = -\cos 2\theta$ $\qquad \lim\limits_{\theta \to 0^+} y = -1$

La droite d'equation $y = -1$ est asymptote à (C).

$\rho(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow$ tangente à (C) à l'origine = la droite $y = x$

$\rho'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow$ tangente à (C) au point $M(\frac{\pi}{2})(0;1)$ est horizontale

$\rho(\frac{\pi}{6}) = -1$; $\rho(\frac{\pi}{3}) = 1/\sqrt{3}$.



b) $\rho = \dfrac{ch\theta}{sh\theta - ch\theta}$

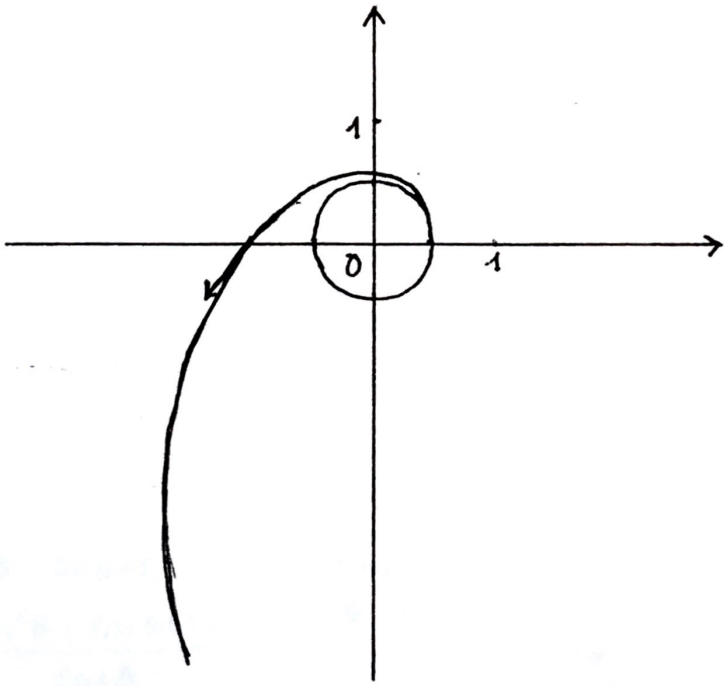
on a $\rho = -\dfrac{e^{2\theta}}{2} - \dfrac{1}{2}$, $D_\rho = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\theta \to -\infty} \rho(\theta) = -\dfrac{1}{2}$ => (C) admet un cercle asymptotique de centre O, de rayon $\frac{1}{2}$

$\rho'(\theta) = -e^{2\theta} < 0$

θ	$-\infty$		$+\infty$
ρ'		$-$	
ρ	$-1/2$	$\searrow$	$-\infty$

θ	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/3$
ρ	$-0{,}52$	$-0{,}6$	-1	$-2{,}9$	$-4{,}56$
ρ'	$-0{,}04$	$-0{,}21$	-1	$-4{,}8$	



c) $\rho = \dfrac{\sin\theta.(\sin\theta+1)}{\cos\theta}$

ρ est 2π- périodique, $\rho(\pi-\theta) = -\rho(\theta) \Rightarrow M(\pi-\theta)$ et $M(\theta)$ sym/ox

$D_\rho = \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$, on peut donc étudier (C) sur $]-\pi/2, \pi/2[$

et completer par symétrie /ox

$$\rho'(\theta) = \frac{-\sin^3\theta + 2\sin\theta + 1}{\cos^2\theta} = \frac{(\sin\theta+1)(-\sin^2\theta+\sin\theta+1)}{\cos^2\theta}$$

$\rho'(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta_0 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \theta_0 \simeq -0{,}67 \quad (\theta_0 \simeq -38°)$

$\rho(\theta_0) \simeq -0{,}3.$

$\rho'(\theta)$ est du signe de $\sin\theta - \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2}$

θ	$-\pi/2$		θ_0		$\pi/2$
ρ'	‖	$-$	0	$+$	‖
ρ	‖ 0	↘	$\rho(\theta_0)$	↗	$+\infty$ ‖

$\rho(\theta) = 0 \Rightarrow$ à l'origine (C) admet une tangente horizontale

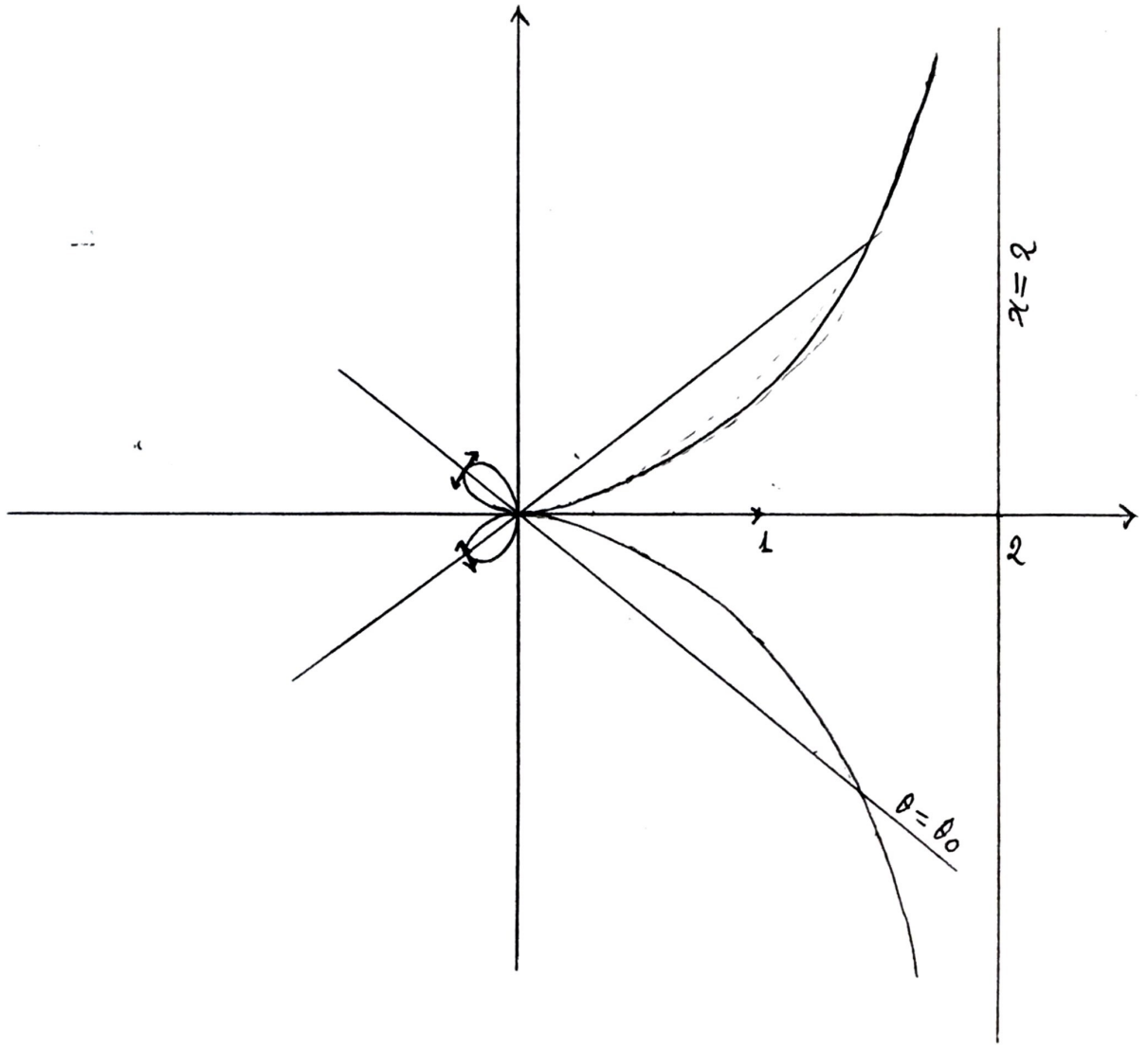
$\dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{-\sin^2\theta+\sin\theta+1}$; $\lim\limits_{\theta \to -\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = 0 \Rightarrow$ tangente à l'origine

verticale

$x(\theta) = \sin\theta\,(\sin\theta+1)$ $\qquad \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} x(\theta) = 2^-$

$y(\theta) = \dfrac{\sin^2\theta\,(\sin\theta+1)}{\cos\theta}$ $\qquad \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} y(\theta) = +\infty$

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote.



d) $\rho = 2\cos\theta - \cos 2\theta$

(cf Sujet IV)

On a $\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta)$ et $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$

On fera l'étude pour $\theta \in [0, \pi]$ et on complétera par une symétrie par rapport à $(O, \vec{i})$

$$\rho' = 2(\sin 2\theta - \sin\theta) = 4 \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{3\theta}{2}.$$

Donc : $$\rho'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}.$$

D'où le tableau de variations :

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
ρ'	0	$+$	0	$-$	-2	$-$	0
ρ	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	-3

$$\rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \qquad (\theta_0 \simeq 1{,}945).$$

Points doubles. La courbe étant complètement décrite pour $\theta \in [0, 2\pi]$ on a (cf. rappel de cours) pour les points doubles :

$$\theta_2 = \pi + \theta_1 \quad \text{et} \quad \rho(\theta_2) = -\rho(\theta_1)$$

$$2\cos\theta - \cos 2\theta = -2\cos\theta + \cos 2\theta$$

et $$\cos 2\theta_1 = 0 \quad \text{donc} \quad \theta_1 \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

et $$\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\rho\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \qquad \text{(point I de la figure.)}$$

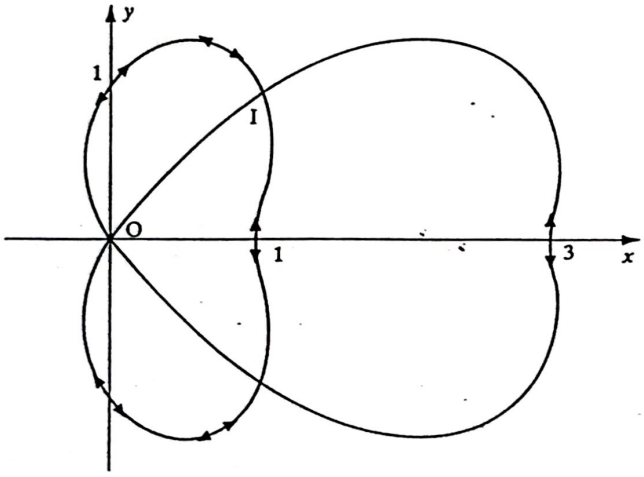
On a : $(\operatorname{tg} V)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2} \quad \left(V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}\right)$.

Le même point est obtenu pour $\pi + \frac{\pi}{4}$. On trouve $V\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{8}$ et les tangentes sont orthogonales.

Étude locale en $\theta = 0$. On a :

$$x = \rho \cos\theta = 2\cos^2\theta - \cos\theta \cdot \cos 2\theta$$
$$= 1 + \cos 2\theta - \cos\theta \cdot \cos 2\theta = 1 + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2).$$

Donc $x(\theta) > 1$ au voisinage de 0.



Université Antilles - Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année Universitaire
1992 - 1993

UV M 12 ANALYSE

Travaux Dirigés série 5.

Exercice n°1 :
Etudier la continuité à l'origine des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$

a) $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Exercice n°2 :
Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions f et calculer ses dérivées dans chacun des cas suivants :
a) $f(x,y) = e^x \cos y$ b) $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos xy$

Exercice n°3 :
Etudier la différentiabilité des fonctions f dans chacun des cas suivants et définir la différentielle.

a) $f(x,y) = e^{xy}(x+y)$ b) $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{pour } (x,0) \end{cases}$

Exercice n°4 :
Montrer que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ admet une dérivée selon tout vecteur

mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice n°5.
A) Calculer les intégrales doubles suivantes

a) $I = \iint_\Omega \dfrac{dx\,dy}{(x+y)^3}$ où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1<x<3,\ y>2,\ x+y<5\}$

b) $I = \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ avec $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| < 1\}$

avec • $f(x,y) = y e^{x^2} \sin(x^2+y^2)$ •• $f(x,y) = \sin\left(xy^2\sqrt{y^2+x^2+1}\right)$

••• $f(x,y) = y^2$ ∴ $f(x,y) = x^2$.

c) $I = \iint_\Omega x^2y^2\,dx\,dy$ où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$

B) Calculer $I = \iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy$ $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, $a>0$, $b>0$

On pourra utiliser le changement de variable $\begin{cases} x = a\rho\sin\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$

Université Antilles-Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles

UVM12
Travaux dirigés n° 5

Année Universitaire
1992-1993

Corrigé du TD n° 5

Exercice n° 1 :

a) On choisit $\|(x,y)\| = \sup(|x|, |y|)$
On a alors :

$$|x^3 - y^3| \leq 2\,\|(x,y)\|^3 \quad \text{et} \quad x^2+y^2 \geq \|(x,y)\|^2$$

D'où :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x,y)| \leq 2\,\|(x,y)\| \quad \text{soit} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

f est donc continue à l'origine.

b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x,-x)$.
Pour tout $x \neq 0$, on a $g(x) = -\frac{1}{3}$. D'autre part $g(0) = \frac{1}{3}$. Donc g n'est pas continue en 0.
Or (f continue en (0,0)) $\Rightarrow$ (g continue en 0). D'où f n'est pas continue en 0.

Exercice n° 2 :

a) $x \to e^x \cos y$ et $y \to e^x \cos y$ sont dérivables $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y \end{cases}$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos xy - y(x^2+y^2)\sin xy$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos xy - x(x^2+y^2)\sin xy$.

Exercice n° 3 :

a) f admet des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = [y(x+y)+1]e^{xy} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = [x(x+y)+1]e^{xy}$$

Les fonctions $(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$
Donc f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 \quad df(x,y)(h,k) = \{h[y(x+y)+1] + k[x(x+y)+1]\}e^{xy}.$$

b) • Soit $D = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Dans $\mathbb{R}^2 - D$, f produit de fonctions continues est continue.
Soit $(x_0,0)$ un point de D. Pour tout couple (x,y) on a $|f(x,y)| \leq y^2$.
De $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} y^2 = 0$ (la fonction $(x,y) \to y^2$ est continue !) il résulte

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 \quad \text{et donc f est continue en } (x_0,0).$$

donc sur $\mathbb{R}^2$.

•• En tout point (x,y) avec $y \neq 0$, f admet des dérivées partielles continues et donc f est différentiable.

Etudions la différentiabilité en un point $(x_0,0)$.
On a :

$$f(x_0+h,k) = k^2 \sin\frac{x_0+h}{k} \quad \text{si } k \neq 0 \quad \text{et } f(x_0+h,k) = 0 \text{ si } k=0$$

Prenons $\|(h,k)\| = \sup(|h|,|k|)$.

On a donc : $\forall (h,k)\quad |f(x_0+h,k)| \leq k^2 \leq \|(h,k)\|^2$.

D'où : $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{1}{\|(h,k)\|}\left[f(x_0+h,k)-f(x_0,0)\right]=0$

Il en résulte que f est différentiable en $(x_0,0)$ et la différentielle en un tel point est nulle

... Il est immédiat que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2-D$. En un point $(x,y)\notin D$, on a :

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\dfrac{x}{y} - x\cos\dfrac{x}{y}$

De $\left|y\sin\frac{x}{y}\right|\leq|y|$, on a : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} y\sin\dfrac{x}{y}=0$.

Par contre $(x,y)\to x\cos\frac{x}{y}$ n'a pas de limite en $(x_0,0)$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0,0)$, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°4 :

Soit $\vec{u}(\alpha,\beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, nous avons pour $\rho=0$

$f(\rho\alpha,\rho\beta)-f(0,0) = \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\rho^3\alpha^2\beta}{\rho^2(\alpha^2+\beta^2)} = \dfrac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ D'où $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \dfrac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

En particulier, pour $\vec{i}(1,0)$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}(0,0)=0$.

$\vec{j}(0,1)$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{j}}(0,0)=0$.

Si f est différentiable au point $(0,0)$, sa différentielle serait nulle, on aurait donc

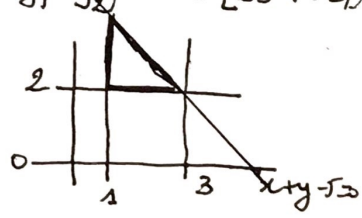
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

Mais pour $y=x$, nous avons $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{2\sqrt{2}\,|x|}$ qui ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0, donc f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

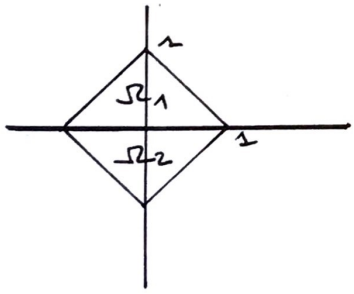
Exercice n°5 :

a) On a $I=\int_1^3\left(\int_2^{5-x}\dfrac{dy}{(x+y)^3}\right)$ De $\int_2^{5-x}\dfrac{dy}{(x+y)^3} = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]_2^{5-x} = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{25}-\dfrac{1}{(x+2)^2}\right]$

puis de $\int_1^3 \dfrac{-dx}{(x+2)^2} = -\dfrac{2}{15}$. On a $I=\dfrac{2}{75}$



b)



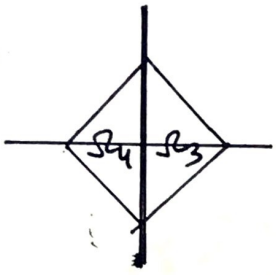
$I=\iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy$.

or $\iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} f(x,-y)\,dx\,dy$

Ω_2 : image de Ω_1 par la symétrie $\perp$ d'axe $(O,\vec{i})$

On a : $f(x,y) = y e^{x^2} \sin(x^2+y^2) \Rightarrow f(x,-y) = -f(x,y)$

D'où $I = 0$.



Ω_4 : symétrique (orthogonale d'axe $(O,\vec{j})$) de Ω_3.

$I = \iint_{\Omega_3} + \iint_{\Omega_4}$ et $\iint_{\Omega_4} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_3} f(-x,y)\,dx\,dy$

or si $f(x,y) = \sin\left(xy^2\sqrt{y^2+x^2+1}\right)$

on a $f(-x,y) = -f(x,y)$

D'où $I = 0$.

Comme au • on a : $\iint_{\Omega_2} y^2\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} |y|^2\,dx\,dy \Rightarrow I = 2\iint_{\Omega_1} y^2\,dx\,dy$

or $\iint_{\Omega_1} y^2\,dx\,dy = \iint_{D_2} y^2\,dx\,dy + \iint_{D_1} y^2\,dx\,dy$.

Or D_2 est le symétrique de D_1 par rapport à $(O,\vec{j})$ et $(x,y) \to y^2$ est paire par rapport à x. D'où :

$$\iint_{D_2} y^2\,dx\,dy = \iint_{D_1} y^2\,dx\,dy$$

D'où :

$$I = 4\iint_{D_1} y^2\,dx\,dy = 4\int_0^1\left(\int_0^{1-x} y^2\,dy\right)dx = \frac{1}{3}.$$

Ω invariant par rapport à la 1ère bissectrice d'où $I = \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f(y,x)\,dx\,dy$

D'où $\iint_\Omega x^2\,dx\,dy = \iint_\Omega y^2\,dx\,dy = \frac{1}{3}$

c) $I = \iint_{\Omega'} \rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta$ où $\Omega' = \{(\rho,\theta) \,/\, 0<\rho<1,\ 0<\theta<2\pi\}$.

$$I = \int_0^1 \rho^5\,d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{24}.$$

B] On a $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho$

D'où $I = \iint_{\Omega'} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,ab\,\rho^3\,d\rho\,d\theta$ où $\Omega' = \{(\rho,\theta) \,/\, 0<\rho<1,\ 0<\theta<2\pi\}$

Donc : $I = ab\int_0^1 \rho^3\,d\rho \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,d\theta$.

On a : $\int_0^{2\pi} a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2\cos 2\theta}{2} + \frac{b^2\sin 2\theta}{2}\right]d\theta$

$= \pi\left[a^2+b^2\right]$

D'où $I = \frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$

Université des Antilles et de la Guyane
UFR Sciences exactes
Département : Mathématiques-Informatique

Année 1992-1993
DEUG A3 1ère année

TD complémentaire : 11/05/93

1°) Montrer que pour tout entier naturel n, les fonctions
$x \mapsto \cot g^2 x \sin^2 nx$; $x \mapsto \dfrac{\sin^2 nx}{x^2}$; $x \mapsto \dfrac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}$
sont prolongeables par continuité en 0 et établir la double inégalité :

$$\int_0^{\pi/2} \cot g^2 x \sin^2 nx \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{x^2} dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin^2 x} dx$$

2°) Démontrer que l'intégrale généralisée $J_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ est convergente et que $J_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_n}{n}$ où $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{x^2} dx$.
En déduire la valeur de J_2.

3°) Calculer, à partir des résultats précédents, les intégrales généralisées.

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos nx}{x^2} dx, \quad J_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$$

<u>Indication pour 2°)</u> En posant $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx$,
$B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}$, $C_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cot g^2 x \sin^2 nx \, dx$, montrer que

$A_{n+1} - A_n = B_{2n+1}$, $B_{2n+1} - B_{2n-1} = 0$; $C_n = A_n - \dfrac{\pi}{4}$.

UNIVERSITE DES ANTILLES ET DE LA GUYANE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES
Département de Mathématiques/Informatique

Année Universitaire 1992-1993
Mars 1993

DEUG A 1ère Année
U.V. Algèbre/Analyse
Durée 3 heures

Les parties I et II devront être rédigées sur copies distinctes.

Partie I *Algèbre (9 pts)*

Exercice 1 *(2 pts)*

f étant une application de l'ensemble E dans l'ensemble F, B désignant une partie de F, montrer que :

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F) \quad f\left[f^{-1}(B)\right] = B$$

Exercice 2 *(2 pts)*

1°) Développer $(1 + x)^{2n}$

i) en utilisant directement la formule du binôme de Newton

ii) en écrivant que $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \ (1+x)^n$

2°) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

Exercice 3 *(2 pts)*

Soit f un morphisme du groupe (G, .) vers le groupe (G', .) . Montrer que le noyau de f, Kerf, est un <u>sous groupe distingué</u> de G.

Exercice 4 *(3 pts)*

On considère deux groupes (G, .) et (G', .), deux morphismes de groupes f et g de (G, .) vers (G', .).

On note $H = \{x,\ x \in G,.\ \ f(x) = g(x)\}$

1°) Montrer que H est un sous groupe de G

2°) On désigne par h l'injection canonique de H dans G ; montrer que $f \circ h = g \circ h$

.../

Partie II *Analyse (11 pts)*

Question de cours (2 pts)

Enoncer et démontrer la propriété d'Archimède

Exercice 1 (6 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par :

$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$

1°) Etudier les variations de f_n pour $x \in [0 + \infty[$

2°) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule racine positive que l'on notera U_n. On définit ainsi une suite U .

3°) Déterminer le signe de $f_n(U_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que la suite U est strictement décroissante et convergente .

4°) Montrer que $0 < U_2 < 1$ et en déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} U_n^{n+1} = 0$

5°) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{U_n^{n+1} - 1}{U_n - 1} = 2$

En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \dfrac{1}{2}$

Exercice 2 (3 pts)

En utilisant la concavité d'une certaine fonction démontrer que :

$$\forall a, b, c \in]0 + \infty[\ \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

J. NARA .

860815

Département de Mathématiques/Informatique

Année Universitaire 1992-1993 — DEUG A 1ère Année

Session de juin 1993 — **U.V.M12 (Algèbre/Analyse)**

Partie II : (*Analyse*) (11 pts)

Exercice 1 (2 pts)

T Int. gén.

0,5 + 1 — 1°) Montrer que les intégrales $I_1 = \int_0^1 \frac{t^3 \operatorname{Ln} t}{(1+t^4)^2}\,dt$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{t^3 \operatorname{Ln} t}{(1+t^4)^2}\,dt$ sont convergentes.

0,5 — 2°) Calculer $I = I_1 + I_2$ On pourra utiliser le changement de variable $U = \frac{1}{t}$.

Exercice 2 (5 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $U_0(x) = \sin x$ et $U_{n+1}(x) = \int_0^x t\, U_n(t)\,dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1 1°) Calculer, par x réel fixé, $U_1(x)$ et $U_2(x)$

1 2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction réelle $x \to U_n(x)$ est impaire

1 3°) a) Etudier les variations de la fonction $U_1(x)$ pour $x \in \left[0\ \frac{3\pi}{2}\right]$

1 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \left[0\ \frac{5\pi}{4}\right]$, $U_n(x) \geq 0$

(On pourra faire un raisonnement par récurrence)

1 4°) Etudier pour $n \in \mathbb{N}^*$, n fixé, les variations de la fonction réelle $x \to U_n(x)$ pour $x \in \left[0\ \frac{5\pi}{4}\right]$

Exercice 3 (4 pts)

Etudier et représenter graphiquement la courbe paramètre plane $(\mathcal{C})$

1 bornes et br. parab.

1 variations

1 $A\binom{4}{2}$ rebroussement de 1-espèce

définie par : $\begin{cases} x(t) = 3t + \frac{1}{t^3} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$ pour $t \in]0 +\infty[$

1/2 $\mathcal{C} \cap \{y = \frac{1}{3}x\}$

On précisera la nature du point stationnaire, ainsi que la pente de la tangente au point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec son asymptote.

0 pt pour la courbe mais 1/2 pt au choix du correcteur.

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES
Département de Mathématiques/Informatique

Session de Septembre 1993 **U.V.M12 (Algèbre/Analyse)**
Durée 3 heures

Pour avis
Seyb

PARTIE II *(Analyse)* **(11 pts)**

Exercice 1 (6 pts)

Soit α un réel strictement positif , on considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n définie pour tout réel t par $f_n(t) = e^{-nt^2}$ et la suite U définie par $U_n = \int_0^{\alpha} f_n(t)\, dt$.

1°) Pour n fixé, étudier les variations de la fonction f_n

2°) Justifier l'existence de la suite U, calculer $U_{n+1} - U_n$, en déduire que la suite U est convergente.

3°) Pour tout $n \geq 2$, montrer que : $\int_0^{\frac{1}{\mathrm{Ln}\, n}} f_n(t)\, dt \leq \frac{1}{\mathrm{Ln}\, n}$

4°) a) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$ tel que : pour $n \geq n_0$ on ait, $\frac{1}{\mathrm{Ln}\, n} < \alpha$.

b) Montrer que pour $n \geq n_0$, on a : $\int_{\frac{1}{\mathrm{Ln}\, n}}^{\alpha} f_n(t)\, dt \leq \left(\alpha - \frac{1}{\mathrm{Ln}\, n}\right) e^{\frac{-n}{(\mathrm{Ln}\, n)^2}}$

5°) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{(\mathrm{Ln}\, x)^2}$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$)

b) Déduire des questions précédentes la limite de la suite U.

Exercice 2 (5 pts)

Etudier et représenter graphiquement la courbe, dont une équation polaire est :

$$f(\theta) = \rho = \frac{\sin 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

On montrera en particulier l'existence d'une symétrie par rapport à la droite $\theta = \pi/4$ et on précisera la tangente aux points de paramètre $\theta = \pi/4$; $\theta = \pi/2$.